Részlet a versenyszabályzatból

- Emlékeztetünk arra, hogy válaszként minden feladatra egy egész számot kell feltüntetni a válaszlapokon (0000-tól 9999-ig).
- Ha a ti válaszotok nem egész szám, akkor annak egész részét írjátok a válaszlapra!
- Ha az eredmény negatív szám, vagy a feladatnak nincs megoldása, akkor 0000-t írjatok!
- Ha az eredmény nagyobb 9999-nél, vagy nem egyértelmű, akkor 9999-t írjatok válaszul!
- A számolás során jól jöhetnek az alábbi közelítő értékek:

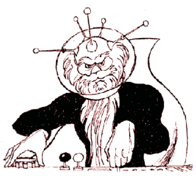
$$\sqrt{2} = 1.4142; \qquad \sqrt{3} = 1.7321; \qquad \sqrt{5} = 2.2361; \qquad \sqrt{7} = 2.6458; \qquad \pi = 3.1416.$$

Időhatárok

- A Jolly feladat kijelölésére az első 15 percben van lehetőség.
- Az első 30 perc leteltével már nem lehet a szöveggel kapcsolatos kérdéseket feltenni. A kérdéseket csak a csapatkapitányok tehetik fel a zsűrinél.
- 120 perc elteltével a versenynek vége.

1. Aladár űrhajójának radarja szabályos háromszög alakú (csúcsai A, B, C). Utazása során egyszer csak észrevesz a P pontban egy furcsa jelet sugárzó bolygót. Meghatározva a bolygó helyzetét azt állapítja meg, hogy, ha P merőleges vetülete a BC, CA és AB oldalakra rendre A_1, B_1 és C_1, akkor $AC_1 = 4$, $C_1B = 8$ és $BA_1 = 5$ egység. Mennyi $CB_1 \cdot B_1A$? (A P pont a radar felületén, tehát az ABC háromszöglapon van.)

20 pont



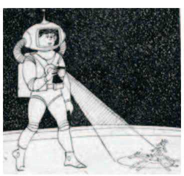
2. Mézga Géza sürgősen szeretné elérni ük-ük-ükunokáját, MZ/X-et a Mézga Rádión keresztül, ám Aladár – aki ismeri a titkos hívókódot – éppen hegedűórán van. Géza csak annyira emlékszik, hogy a kód egy olyan 8-jegyű szám, ami a 9-edére csökken, ha az első számjegyét töröljük.

Hány próbálkozásra van szüksége, hogy biztosan elérje Öcsit? 20 pont

3. Aladár éppen egy tengeralattjáró megalkotásán mesterkedik. Ehhez azonban a legszükségesebb hozzávalók (20 m spárga, egy biciklipumpa, 3 db fogkefe és 10 kg gumicukor) még hiányoznak, elment tehát boltba, hogy ezeket beszerezze. Mindezt egy elég forgalmas napon tette, így a pénztárnál igencsak feltorlódtak az emberek. Vele együtt 21-en állnak sorban. Mind különböző magasságúak, Aladár a harmadik legalacsonyabb. A sorban legelöl állótól kezdve felsoroljuk, hogy az egyes emberek előtt hány náluk magasabb ember áll a sorban:

$$0, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 2, \quad 3, \quad 3, \quad \ldots \quad 9, \quad 9, \quad 10.$$

Aladár mögött hány nála magasabb ember áll a sorban? 20 pont



4. A Lepénybolygón járva lámpája fényében Aladár az ABC háromszöget látja, amelyben A_1 és B_1 a BC illetve AC oldalak belső pontjai és az AA_1, BB_1 szakaszok metszéspontja M. Az AMB_1, AMB és BMA_1 háromszögek területe rendre 3, 7 és 7 egység. Mennyi a CB_1MA_1 négyszög területe?

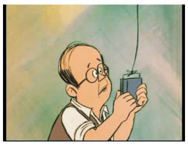
25 pont

5. Mézgáék sokszor használják a fénypostát, ám folyton elfelejtik kinyitni az ablakot a küldemény érkezése előtt. Nem meglepő hát, hogy elég sűrűn kell újra üvegeztetni. Ez nem olcsó mulatság, ezért elég gyakran kopogtatnak Máris szomszéd ajtaján kölcsönkérni. Máris igen csak megelégelte már, hogy a kölcsönadott pénzt sosem látja viszont, ezért mikor ma Mézgáék újra felkeresték, kibúvóként ezt válaszolta:

– Akkor adok én nektek kölcsönt, mikor megmondjátok p és q relatív prím pozítív egész számok összegét, ahol

$$\prod_{k=2}^{100} \frac{k^3+1}{k^3-1} = \frac{p}{q}.$$

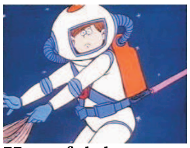
Mit válaszoljanak Mézgáék? 25 pont



6. MZ/X, hogy javítsa ük-ük-üknagyapjáékkal való rádiókapcsolatát, elhatározta, hogy bővítést végez az MZ/X Minusz Szinusz Gamma, Ultra Mikroszféra rádióállomásán. Tervrajzán az állomás alapja az $A_1A_2A_3A_4$ egységnégyzet. Ezen négyzet oldalain szeretné építettni az új adótornyait a B_1, B_2, B_3 és B_4 pontokba úgy, hogy B_i az A_iA_{i+1} szakaszon legyen (ahol természetesen $A_5 = A_1$) és $A_iB_i = \frac{1}{n}$ teljesüljön.

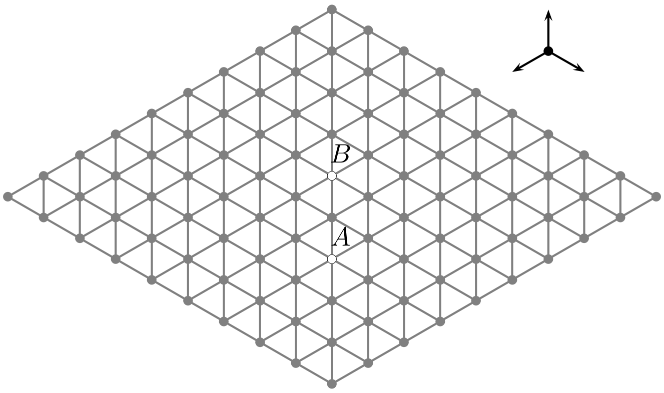
Számításai szerint, ha az A_1B_2, A_2B_3, A_3B_4 és A_4B_1 egyenesesek által meghatározott négyzet területe legalább 0.9 lenne, akkor talán saját maga is képes lenne fénypostával utazni, így meglátogathatná köbükijét. Mi az a legkisebb n egész, amire ez teljesül? 25 pont

7. – MZ/X jelentkezz! Öcsikém, kérlek küldj egy 7-es példát a Kavics Kupára! Nekem nem megy, egész nap nyakamon a csacsika család.
– Kapcsford. 7-es? PatJanjav. Ó, bocs mond ómagy:
Legfeljebb hány eleme lehet egy egész számokból álló M halmaznak, ha M egyik eleme sem osztható 7-tel, de bármely 4 eleme közt van néhány, melyeknek összege osztható 7-tel?
30 pont



8. Aladár a Triangularis Cancellos Infinitus galaxisban bolyong, ahol a bolygók egy végtelen háromszögrács rácspontjaiban helyezkednek el. Aladár az A pontban van, és a B pontban lévő Benzinion bolygóra szeretne eljutni tankolni, ugyanis űrhajójában, a Guliverkliben igen csak fogytán van az üzemantianyag.

Hányféleképpen tudja ezt megtenni, ha egy bolygóról mindig csak az egyik szomszédes bolygóra mehet, de csak a három megadott irányban? Még 13 bolygóköznyi üzemantianyag van a tartályában. Azok az útvonalak is számítandók, amelyek menet közben útba ejtik a B pontot, majd visszatérnek oda.



30 pont

9. Paula Krisztа szülői értekezletéről azzal a hírrel jött haza, hogy Kriszta bukásra áll matekból. Ezért korholja férjét: „Te vagy az oka mindennek, a te elavult nevelési módszereid! Ahelyett, hogy segíteni igyekeznél ennek a szegény gyereknek...”
„Segíteni?! Tán én tanuljam meg helyette a leckét, én oldjam meg a számtanpéldát?” A szemtelen Kriszta erre csak kuncog: „Úgysem tudnál. Ha eléd tesznek egy egyenletet két ismeretlennel, azt hiszed, hogy be kell nekik mutatkozni.” Pedig Krisztának sem bemutatkoznia kellene, hanem megadni $\lfloor 100xy \rfloor$ értékét, ahol x és y olyan racionális számok, amelyekre

$$\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt{x\sqrt{3}}-\sqrt{y\sqrt{3}}.$$

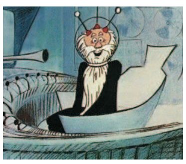
30 pont

10. Kriszta amennyire irtózik bárminemű hasznos és értelmes feladat elvégzésétől, olyan hihetetlen kitartással és makacs szorgalommal vállalkozik értelmetlen dolgok művelésére. Tegnap is, amíg szülei abban a naiv hitben éltek, hogy a szobájában tanul, valójában Maffia szőrét bodorította apja fésűjével. Mindezt annyiszor ismételte, ahány olyan permutációja van az $1, 2, \ldots, 16$ számoknak, amelyben minden $1 \le k \le 16$ mellett teljesül az $|i_k - k| \le 1$ feltétel.
Hányszor kellet tűrnie a macskának a fésűt? 30 pont

11. A Guliverkli megalkotásához Aladárnak szüksége volt némi 109-68 Utópium nevű, nálunk még jobbára ismeretlen XXV. századbeli elemre. Szerencsére MZ/X bőségesen ellátta vele, küldött neki egy nagy, szabályos tetraéder alakú anyagot. Aladárt ezt, hogy fel tudja használni, szeretné kisebb részekre vágni.

Úgy dönt, hogy kettévágja az összes olyan sík mentén, amely tartalmazza a tetraéder egy-egy élét és átmegy a szemköztes él felezőpontján, majd miután az összes vágást elvégezte a még egyben lévő anyagon, utána szétszedi a vágások mentén kisebb részekre. Vajon hány részt kapott így? 30 pont

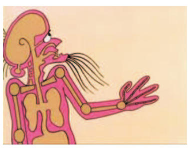
12. Paula mindig is egy kacsalábon forgó palotáról álmodozott. Addig nyaggatta Gézát, míg az elhatározta, hogy rendel egyet Öcsitől fénypostán. A XXX. századi építészetet az jellemzi, hogy az épületek téglatest alakúak, és a téglatestnek pontosan annyi m^2 a felszíne, mint ahány m^3 a térfogata. Legfeljebb hány méter hosszú lehet egy ilyen épület testátlója, ha tudjuk, hogy ez a testátló, a felszín, illetve a térfogat méterben, négyzetméterben illetve köbméterben kifejezve mind-mind egész szám? 35 pont



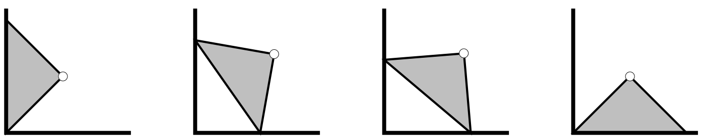
13. MZ/X azt tanulta, hogy az ómagyarok (azaz mi) mindent sokkal körülményesebben és hosszabban fejeztek ki, mint a XXX. században élők. Ez a beszélt nyelvből is meglátszik. Azonban azzal talán kicsit túloz, hogy azt hiszi, hogy a

$$S=(4-a)\cdot\sqrt{2+a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{3a+4}$$

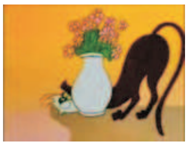
kifejezést nem tudjuk egyszerűbb alakra hozni, amikor $a=1+\sqrt{5}$. Mi lesz az eredmény? 35 pont



14. A Lepénybolygón járva Aladár észrevett egy bolygólakót, aki egy egyenlő szárú derékszögű háromszög alakú bútort tolt át egy derékszögű sarkon az alábbi ábra szerint. Mekkora utat járt be eközben a derékszögű csúcs, ha az átfogó hossza 2 méter? Adjuk meg a megtett utat (tehát nem az elmozdulást és nem is a pályagörbe hosszát) centiméterben! 35 pont



15. Hufnágel Pisti meghívta magához a Mézga családot vacsorára. Mézgáék le vannak nyűgözve a nagy és pompás ház láttán. Hufnágel Pisti bevezeti óriási étkezőhelyiségébe, és hellyel kínálja őket 24-fős kör alakú asztalánál. Hogy kihasználják a hatalmas asztal nyújtotta lehetőségeket, a négyfős Mézga család úgy ül le, hogy egyikük se kerüljön közvetlenül a másik mellé. Hányféleképpen választhatják ki a négy széket, amelyen majd ülni fognak ? Hogy ki melyiken ül, azt most ne vegyük figyelembe. 35 pont



16. Maffia, a macska egerészik. Az asztalon van egymás mellett sorban n lefordított pohár, ezek alá bújhattak egerek, nem tudni hány. Maffia szokásos játéka, hogy egyesével fordítgatja fel a poharakat, hogy megállapítsa van-e két olyan szomszédos pohár, amelyek mindegyike alatt van egér. Megfigyelte, hogy bizonyos n-ek esetén akármilyen ügyesen próbálkozik, lehetséges, hogy minden poharat fel kell fordítania ahhoz, hogy megtudja a választ. Ekkor a feladatot nehéznek nevezzük.

Az $n = 1, 2, \ldots 2013$ értékek közül hánynál nehéz a feladat? 40 pont

17. Az ötköb éves MZ/X a kötelező 80 általános iskolai és 40 gimnáziumi osztály elvégzése után épp az érettségi vizsgájára készül. A következő feladattal azonban nem boldogult. Ómagyarra fordíttatta, és Tőletek vár segítséget benne. Melyik $n < 10000$-re van a legtöbb olyan k pozitív egész, hogy n-et $2k + 1$-gyel osztva k lesz a maradék? 40 pont

18. Aladár megígérte a szüleinek, hogy ma tényleg bemegy az iskolába. Sajnos az előrelátó szülők a csavargást megelőzendő azt is megígértették vele, hogy olyan útvonalon megy oda reggel, hogy minden pillanatban közelebb és közelebb kerüljön az iskolához. Aladár egy 100 szakaszból álló úton jut el az eredetileg tőle 900 m-re levő épülethez. Legfeljebb milyen hosszú lehet az útja méterben? (Az utcák és épületek elhelyezkedése semmilyen irányban sem korlátozza Aladár mozgását és nem csak irányváltáskor, hanem a szakaszokon való mozgás során is folyamatosan közelít a – pontszerű – iskolához.) 40 pont

19. Aladár sok furcsa helyen megfordult űrbéli kalandjai során. Egyik ilyen útja a Tébolygóra vezetett, ahol őrült járgányok robogtak fel-alá. De ha még ez sem volna elég, ezen a bolygón a tömegközlekedés is folyton változott.

A főváros legforgalmasabb útján 4 járat közlekedett minden nap. Ezen az úton 8 megálló volt egymás után sorban. A szeszélyes forgalomirányítók minden reggel véletlenszerűen jelölték ki az aznapi járatok útvonalát, mégpedig úgy, hogy minden megállóban pontosan egy járatnak volt végállomása. Minden járathoz két végállomás tartozik, amik között az oda-vissza közlekedik, és a kettő között minden megállóban megáll. Mi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon van olyan járat, aminek az összes többivel van közös megállója? Adjuk meg a kapott valószínűség 2310-szeresének egész részét!

40 pont

20. Aladár, Kriszta és Géza játszanak. Aladárnak 15, Krisztának 17, Gézának 20 forintja van. Egy menetben véletlenszerűen kiválasztanak két olyan játékost, akinek még van pénze és azok egymással játszanak. $50-50\%$, hogy egyikük illetve másikuk nyer. A vesztes 1 forintot ad a győztesnek. Akinek elfogy a pénze, az kiesik. Addig tart a játék, amíg egyikük elnyeri az összes pénzt.

Átlagosan hány menetből áll a játék? („Egy forintért megmondom!”) 45 pont

21. Aladár beírta az $1, 2, \ldots 81$ számokat egy 9×9-es táblázat mezőibe. Blöki ki szeretné találni, hogy melyik szám hol van. De csak úgy kérdezhet, hogy kijelöli a táblázat egy rácsvonalak határolta négyzet alakú részét. Válaszul Aladár felsorolja a kijelölt részben található számokat, a kedve szerinti sorrendben. Minimum hány kérdésre van szüksége Blökinek ahhoz, hogy biztosan kitalálja, melyik szám hol van?

50 pont