Kavics Kupa 2012

Vadászom, Utamból Kotródj!

1. A rókakölykök versengenek egymással a barlangban, vajon melyikük a legügyesebb és legokosabb. Szeretnének olyan, minél kisebb számot találni, aminek a négyzete a 2012 számsorozattal kezdődik. Természetesen Vuk találta meg a legkisebb ilyet. No de mi ez a szám?

(20 pont)

2. Karak tanítja a kis Vukot vadászni. Azt az utasítást adta neki, hogy figyelje az arra járó csuszokat, és amikor az $x = k$ egyenesre érnek, akkor csapjon le rájuk. Vuk két csuszt fogott, egymástól $1/2$ egység távolságra. Számításai szerint az egyik csusz az $y = \log_5 x$, a másik pedig az $y = \log_5(x + 4)$ görbén haladt. Vajon, ha $k = a + \sqrt{b}$ alkalmas a, b egész számokkal, akkor mennyi $a + b$ értéke?

(20 pont)

3. A térbeli koordinátarendszer $(0, 0, 21/2)$ és $(0, 0, 1)$ pontján egy-egy virágon ül egy-egy pillangó. Meghallva a közeledő Toró, a varjú károgását, felrebbennek, és gyorsan egymáshoz sietnek. Tudjuk, hogy az első pillangó legfeljebb 6, a második legfeljebb $9/2$ távolságot tett meg a találkozásig, továbbá azt is, hogy a találkozási pont mindhárom koordinátája egész. Hány helyen találkozhattak a pillangók?

(20 pont)

4. „Mit hozzak, ludat vagy kacsát?” „Ludat, kacsát!” „És kakast is!” Ezek a kis rókák nagyon telhetetlenek. Ahhoz, hogy Kag sikerrel járjon, jó alaposan szemügyre kell, hogy vegye a tyúkólat. Egy kocka alakú tákolmányról van szó, aminek három különböző élfelezőpontja I, J és K. Vajon mennyi az $IJK\sphericalangle$ szög fokokban mért értékének maximuma? Ha ezt nem számolja ki gyorsan, a kisrókák éhen maradnak.

(25 pont)

5. A V, U és K számokra teljesül, hogy $V+U+K=7$ és

$$\frac{10}{V+U}+\frac{10}{U+K}+\frac{10}{K+V}=7.$$

Mennyi

$$\frac{10K}{V+U}+\frac{10V}{U+K}+\frac{10U}{K+V}$$

értéke?

(25 pont)

6. Toró, a varjú igazán haragos lett, miután megfosztották a tollaitól: Kááár volt velem ujjat húzni! Kááár volt belőlem tollat húzni! Ezt még megemlegetitek! Majd hatááároz-hatjátok meg, hogy hogy mi A^2 8., 9., 10. és 11. szááámjegyei által alkotott négyjegyű szááám, ahol $A = 11\,111\,111\,111$. Kááár volt bizony, hiszen A^2 egy 21-jegyű szááám!

(25 pont)

7. Kicsi Vuk nehezen állt át kezdetben az éjszakai életre, és amíg Karak aludt, addig unaloműzésképpen egy szabályos hatszög alakú igen lapos kavicsot pörgetgetett. Ha egy olyan átló mentén forgatta meg nagyon gyorsan a kavicsot, amely két szemközti csúcsot köt össze, akkor egy A térfogatú testet látott, míg ha egy olyan egyenes körül, amely átmegy a hatszög két szemközti oldalának felezőpontján, a kapott test térfogata B volt. Közben azon gondolkozott, vajon mennyi lehet $(B/A+1)^4$ egészrésze?

(30 pont)

8. „Mennyi Tás!" -kiáltott fel Vuk az égre pillantva. Karak elgondolkozott, majd azt mondta. Igen, pont annyi, amennyi megoldása esik az

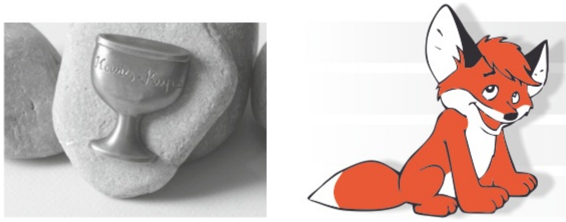
$$\left\lfloor\frac{1}{3}x\right\rfloor+\left\lceil\frac{2}{3}x\right\rceil<\left\lceil\frac{1}{3}x\right\rceil+\left\lfloor\frac{2}{3}x\right\rfloor$$

egyenlőtlenségnek a $[0;2012]$ intervallumba. Hány tás repül az égen?

(30 pont)

9. A tyúkólban 4 sorban és 4 oszlopban helyezkedik el Mari néni 16 tojója. A tyúkok hallva a szomszédból érkező pletykákat, nagyon félnek a rókától, ezért mindegyikük csak 0, 1 vagy 2 tojást tojt reggelre. Hányféle módon történhetett ez meg, ha felírva egy 4×4-es táblázatba a tojások számát, minden sorban, oszlopban, és a két átlóban a 2012 szám számjegyei szerepelnek valamilyen sorrendben?

(30 pont)



10. Vuk, Íny, és 10 kicsi kölykük üli körbe a szerzett zsákmányt. Ha véletlenszerűen kiválasztunk négy rókát közülük (Vukot és Ínyt is beleértve), akkor mennyi annak a valószínűsége hogy négyük között van kettő, akik egymás mellett ülnek? Ha a valószínűség p/q, ahol p és q relatív prím pozitív egészek, akkor $p+q$-t adjátok meg!

(30 pont)

11. Szegény Vahur, a szégyenének híre gyorsan terjedt. Hogy hány kutya tudta meg, mi történt? Annyi, amennyi p^2+q^2 legnagyobb lehetséges értéke, ahol a p és q pozitív prímszámokra teljesül a következő egyenlőség:

$$p^3 - q^5 = (p+q)^2.$$

(30 pont)

12. Karak, látva, hogy unokaöccse orra milyen szép nagy Tást talált, elgondokozott azon, vajon hogy osztozzanak meg a zsákmányon. Ehhez kiszámolta, hogy hány pozitív egészekből álló (x, y) rendezett számpár elégíti ki a

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} = 1$$

egyenletet, ahol p és q két különböző pozitív prímszám. Azonban mire ezt kiszámolta, a kicsi Vuk már csak Tás fejét hagyta meg. Azért számoljátok ki ti is, és mondjátok meg a kis rókának az eredményt, hátha legközelebb ügyesebb lesz az osztozkodásban!

(30 pont)

13. „Az eddig oltalmazó erdő nem rejtekhely többé.” Az ősz beköszöntöttével az emberek nagy vadászatot rendeztek. Az erdőt, amely egy konvex 101-szög, egymást nem metsző átlókkal felosztották háromszögekre az eredményesség érdekében. Jelölje a az olyan háromszögek számát, amelyeknek nincs közös oldala a 101-szöggel, b az olyan háromszögek számát, amelyeknek egy közös oldala van a 101-szöggel, c pedig az olyan háromszögek számát, amelyeknek két közös oldala van a 101-szöggel. Mennyi $a^2+b^2+c^2$ legkisebb lehetséges értéke?

(35 pont)

14. Vuknak a minap egy igen különös BrekkencsGavallérhoz volt szerencséje, ki éppen a kedvesének adott szerenádot: „Ha nem szeretsz, hát én szeretlek, és ha én szeretlek, hát jóóól vigyááááázz!” Ám a Békalány nem elégedett meg a gyönyörű énekkel, és a következő feladványt adta udvarlójának: Hány pozitív egészekből álló (a, b) rendezett számpár elégíti ki a következő egyenletet:

$$\mathrm{lkkt}(a, b) + \mathrm{lnko}(a, b) + a + b = ab?$$

Segítsetek béka úrfinak elnyerni Szíve Brekekéjét! ($\mathrm{lkkt}(a, b)$ a két szám legkisebb közös többszörösét, $\mathrm{lnko}(a, b)$ a két szám legnagyobb közös osztóját jelöli.)

(35 pont)

15. A sikeres vadászathoz Vuknak néha nagyon komoly és bonyolult számításokat kell végeznie, ehhez nem árt, ha ismeri a vidéket, és tud a különféle tereptárgyakhoz viszonyítani. Vuk az X pontban figyeli az Y pontban pihenő nyuszit, és szeretné kiszámolni milyen messze van tőle. Lát a közelben a P és Q pontokban egy-egy fát, amelyek egymástól 50 lépés távolságra vannak. Képzeletben egy 30, illetve egy 40 lépés sugarú kört rajzolt az első, illetve a második fa köré. A két kör egyik metszéspontja A, a PQ szakasz felezőpontja F, és azt vette észre, hogy az X és Y pontok megkaphatók úgy, hogy ha A-ban merőlegest állítunk FA-ra, és ezen egyenessel elmetsszük a két kört. Hány lépés távolságban pihen tőle a nyuszi?

(35 pont)

16. A kis Vuk nagyon büszke volt magára, hogy megfogta Tást, amikor egyszer csak megjelent Sut, a kurta farkú róka, és felszólította, hogy ő, „kis taknyos”, azonnal hordja el magát a vadászterületéről. Ám Vukot kemény fából faragták, és rögtön visszavágott neki egy fejtörővel, ami után Sut elszégyellte magát, és szomorúan kullogott haza. Vajon ti kiálltátok volna a kis róka próbáját, és meg tudtátok volna mondani neki, hogy melyik az a legkisebb $\overline{abcd}$ négyjegyű szám, amelyet megfordítva az eredetitől különböző $\overline{dcba}$ számot kapunk, és amelyre teljesül:

$$\overline{abcd} - \overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{dcba} - \overline{dc} \cdot \overline{ba}?$$

(40 pont)

17. A fővadász tisztában van vele, hogy az állatok néha a bokrok mélyén lapulnak meg a veszély elől. Kifigyelte, hogy a mező szélén álló négy bokorból álló együttesben 1/2 valószínűséggel rejtőzik valamilyen állat egy vadászat során, sosem rejtőzik egynél több állat a bokrok mélyén, és a négy bokrot egyforma eséllyel választják az állatok rejtekhely-ként. Most is épp a bokroknál keresgél, már három bokrot átnézett, de nem talált semmit. Ha p/q esély arra, hogy az utolsó, negyedik bokorban rejtőzik egy állatka, ahol p és q relatív prím pozitív egészek, mennyi $p+q$?

(40 pont)

18. Vahur a legutóbbi csúfos felsülése után elhatározta, hogy ezúttal nem maradhat szégyenben, és őrséget állít Mari néni utolsó megmaradt kakasának. Két társával egy szabályos háromszög három csúcsába álltak fel, a kakas pedig tőlük 2, 3 illetve 5 egység távolságra kukorékolja az utolsókat (a négy állat egy síkban van). Mekkora a szabályos háromszög oldalhosszúságának négyzete?

(40 pont)

19. Vuk egyszer egy domboldalon járva egy különös dologra lett figyelmes: valakik letűztek két függőleges rudat, és felső végpontjaik között kifeszítettek egy szabályos háromszög alakú zászlót, amelynek harmadik csúcsa éppen leér a talajig. A rudak talppontjait összekötő szakasz a vízszintessel 30 fokos szöget zár be. Mekkora a két rúd talppontjainak távolsága, ha az alacsonyabban lévő talpponttal rendelkező rúd magassága 124 egység, a magasabban lévő alapponttal rendelkező rúdé pedig 45 egység?

(45 pont)

20. A rókák igen érzékenyek arra, ha idegen garázdálkodik a vadászterületükön. Az erdőt képzeletben feloszthatjuk egy 16×16-os táblázatra, ezek némelyikében található egy rókabarlang, ez, és csak ez a „mező” a barlang tulajdonosának vadászterülete. Ám a vadászni indulók rendszeresen elkalandoznak mindegyik, a barlangukkal élben vagy csúcsban szomszédos területre, de távolabbra már nem. Tudjuk, hogy minden róka vadászterületén pontosan egy idegen szokott rendszeresen kószálni. Legfeljebb hány rókabarlang lehet az erdőben?

(45 pont)

21. A Simabőrű legszebb trófeájának alátétje egy csillag formájú alakzat, melyet a következő eljárással lehet megkapni: kiindulunk egy 1536 egység területű szabályos 12-szögből, melynek csúcsai A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11} és A_{12}. Ebből a tizenkétszögből kivágjuk az $A_1A_4A_7A_{10}$, $A_2A_5A_8A_{11}$ és $A_3A_6A_9A_{12}$ négyzetek egyesítésével (uniójával) kapott csillag formájú alakzatot: ez az alátét. Mekkora az alátét területének és kerületének aránya? *(50 pont)*