



III. KAVICS KUPA

2007. március 10.

- Emlékeztetünk arra, hogy válaszként minden feladatra egy egész számot kell feltüntetni a válaszlapon (0000-tól 9999-ig).
- Ha a ti válaszotok nem egész szám, akkor annak egész részét íjátok a válaszlapra.
- Ha az eredmény negatív szám, vagy a feladatnak nincs megoldása, akkor 0000-t íratok.
- Ha az eredmény nagyobb 9999-nél, vagy nem egyértelmű, akkor 9999-t íratok válaszul.
- A számolás során jól jöhetnek az alábbi közelítő értékek:

$$\sqrt{2} = 1.4142$$

$$\sqrt{3} = 1.7321$$

$$\sqrt{7} = 2.6458$$

$$\pi = 3.1416$$

Időhatárok

- **Az első 30 perc** leteltével már nem lehet a szöveggel kapcsolatos kérdéseket feltenni. A kérdéseket csak a csapatkapitányok tehetik fel a zsűrinél.
- 90 perc elteltével a versenynek vége.

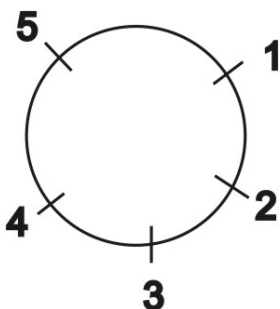
1. Egyszer volt, hol nem volt ...

Gepetto egy téglatest alakú fatuskóból készül kifaragni Pinokkiót. A téglatest felszíne 492 cm^2 , élének összhossza 496 cm . Milyen hosszú a testátlója? **(15 pont)**

2.) Gepetto mester tompaszögű háromszögeket farag. Egyik oldaluk 11 cm , a másik 15 cm és a harmadik oldal mérőszáma is egész szám. Hány ilyen háromszög van? **(25 pont)**

3.) Mielőtt a bábu elkészítéséhez fogna, Gepettónak még ki kell faragnia három kockát. Ezek élhossza centiméterben a $3x^3 - 19x - 17 = 0$ egyenlet három gyöke, és azért tart ilyen sokáig a munka, mert Gepetto sokat vacakol a negatív élhosszúságú kockákkal. Összesen hány cm^3 fára van szüksége a kockák elkészítéséhez? **(35 pont)**

4.) A Beszélő Tücsök úgy felizgatta magát Pinokkió csökönységén, hogy ugrálni kezdett az ábrán látható kör mentén. Az 5 pontból indul és ha páratlan számú pontban áll, akkor egyet ugrik negatív körüljárás szerint, ha pedig páros számú pontban, akkor kettőt. Hol lesz a századik ugrás után? **(10 pont)**



5.) *Lassan járj, tovább érsz...*

Az iskolába vezető egyenes úton Pinokkió öt helyen is megállt nézelődni, ezeket a menetirány szerint A , B , C , D és E jelöli. Ha $AC:BE = 13:19$, $AD:CE = 2$, $BD:AE = 2:3$, akkor mennyi $AE:CD$? (25 pont)

Az ábécéskönyv mellé Pinokkió kapott a Beszélő Tücsöktől egy emeltszintű érettségi példatárat is. Ebben találta a következő feladatokat:

6.) A derékszögű ABC háromszög AB átfogója 2197. Az átfogó egy pontjának a vetülete a CB befogón A_1 , a CA befogón pedig B_1 . Ha $A_1B = 300$ és $CB_1 = 125$, akkor mennyi $\sqrt[3]{A_1C}$? (25 pont)

7.) Legfeljebb mekkora lehet a t értéke, ha a $t\sqrt{xy} \leq 24x + 54y$ egyenlőtlenség minden nemnegatív (x, y) számpárra teljesül? (20 pont)

8.) $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ és $\log_8 b + \log_4 a^2 = 7$. Mennyi ab ? (15 pont)

9.) Hány megoldása van a $\cos 2006x = \cos 2007x$ egyenletnek a $[0; 2\pi]$ intervallumon? (20 pont)

Pinokkiónak ezek után nem nagyon akaródzott iskolába menni...

10.) *A Csodák Mezején...*

A Kandúr és a Róka elmagyarázták Pinokkiónak, hogy a Csodák Mezeje egy körszelet alakú terület, amelyet egy 88 méter hosszú körív és az ennek végpontjait összekötő húr határolnak. A húr felének és a körszelet magasságának az összege 44 méter. Ha Pinokkió elássa a pénzét, akkor másnap reggelre annyi aranyat szüretelhet, ahány négyzetméter a Mező területe. Mennyit? (45 pont)

11.) Pinokkió azon töprengett fejjel lefelé lógva, hogy melyik lehet az a legkisebb pozitív egész m , amelyre $7 \mid m$, $9 \mid (m+1)$, $11 \mid (m+2)$ és $13 \mid (m+3)$. Nincs könnyű dolga, segítsenek neki! (45 pont)

12.) A hiszékeny Tücsök Pinokkiót faggatja, hány aranyat ázott el tulajdonképpen. A bábu csak annyit árul el, hogy a számuk 13 és 1300 között van. A Tücsök ezután megkérdi, nagyobb-e ez a szám 500-nál. Pinokkió válaszol, de persze füllent. Akkor sem mond igazat, amikor a Tücsök azt firtatja, négyzetszámról van-e szó. Furdalni kezdi a lelkiismeret és arra a kérdésre, hogy köbszám-e, igazat felel. A Tücsök ekkor azt állítja, hogy csupán két lehetősége maradt és ha Pinokkió elárulja, hogy a szám második jegye 1-es-e vagy sem, akkor tudni fogja a választ. Pinokkió megmondja neki, a Tücsök kivágja az eredményt, ami persze rossz.

Hány aranyat ázott el Pinokkió? (30 pont)

13.) A tündér házán vígan lobog a zászló: fehér alapon piros kereszt, amelynek a területe a zászló területének a 64 %-a. A keresztet alkotó két csík közös részének a területe a kereszt területének a 25 %-a. Legfeljebb hány %-a lehet a függőleges csík területe a zászló területének? (30 pont)



14.) A szigorú, de igazságos Kékhajú Tündér úgy határozott, hogy ha Pinokkió a reggeli utáni első kérdésére nem mond igazat, akkor megnő az orra, míg ha igazat mond, akkor kisebb lesz valamivel. Az első reggelen Pinokkió orra egy centit nőtt, a másodikon pedig kettőt. Az orra ezután a $p_n = \frac{p_{n-1}-3}{p_{n-2}}, n \geq 3$.

képlet szerint változott (tehát p_n Pinokkió orrhosszának a változását jelenti az n -edik napon, $p_1 = 1$ és $p_2 = 2$.) Hány centivel lett hosszabb Pinokkió orra harminc nap alatt? (40 pont)

15.) Pinokkió és a Tündér mastermind-ot játszanak. Hogy a kék haj ne zavarja a bábút, színek helyett a Tündér az első nyolc pozitív egész egy adott sorrendjére gondol, Pinokkió pedig hasonló számnycasokkal tippel. A bábu első tippje $\{5, 8, 1, 3, 2, 4, 7, 6\}$, a második pedig $\{7, 5, 4, 3, 8, 6, 2, 1\}$ volt. Az egyik tippjében – hogy melyikben, nem tudjuk – Pinokkió négy, a másikban pedig öt számot talált el a helyén. Ha a gondolt számnycasot két négyjegyű számra vágva összeadjuk, akkor mennyi az eredményül adódó négyjegyű szám? (40 pont)

16.) A Játékkorszámban forgalomban lévő pénz a garas, a címletek pedig kizárólag a 2 nemnegatív egész kitevőjű hatványai. Hányféleképpen lehet kifizetni 16 garast? (A felhasznált címletek sorrendje nem számít.) (35 pont)

17.) *Pons asinorum...*?

Pinokkióval együtt összesen 100 **teljesen egyforma** csacsi vár a sorára, hogy eladják őket a vásáron. Amíg Pinokkió is a váraozók között van, a csacsik nem hajlandók baktatni, fuvarozni kell őket, **fordulónként egy aranyért**. Ha Pinokkiót már elvitték, akkor a többiek hajlandók kutyagolni. A kocsis azt is tudja, hogy Pinokkió útközben megint bábu lesz, sőt, azok a csacsik is visszavedlenek gyerekké, akikkel egy szállítmányban utazik. Egy-egy fuvarral **akárhány csacsit szállíthat**, a vásáron pedig **minden csacsiért egy-egy arany** üti a markát!

Legfeljebb hány arany bevételt érhet el így biztosan az elvetemült kocsis? (55 pont)

18.) *A cethal gyomrában*

Gepetto itt is a számolást gyakorolja Pinokkióval. Egy 2-est és egy 3-ast ír egymás mellé az első sorban. Alá újabb sorokat ír, mindegyik 2-sel kezdődik és 3-sal végződik, belül pedig Pinokkió mindenhová a fölötte lévő két szám összegét írja. Milyen szám kerül a 15. sor 11. helyére? (30 pont)

	2	3		
	2	5	3	
	2	7	8	3

19.) A Tündér 6 fűszálat vett a kezébe úgy, hogy alul-felül csak a végük látszott, ezeket Pinokkió alul-felül párosával összekötötte. A Tündér megígérte, hogy ha ezzel összefüggő lánc alakul ki, akkor Pinokkióból igazi kisfiú lesz. Ha p/q ennek a valószínűsége, akkor mennyi $p + q$? (A tört egyszerűsített alakját használd!) (35 pont)

20.) Pinokkió hús-vér kisfiú lett és éppen a matekleckéjén gondolkodik. Ki kell számolnia az alábbi kifejezés értékét.

$$\frac{(7^4+64)(15^4+64)(23^4+64)(31^4+64)(39^4+64)}{(3^4+64)(11^4+64)(19^4+64)(27^4+64)(35^4+64)}$$

Mennyi az eredmény? (55 pont)