Kardos-Montágh Matematikaverseny, 2022.
I. forduló

Algoritmusok

Mi is az az algoritmus? Ez a kérdés alapvető fontosságú, elengedhetetlen fogalom a matematikában és az informatika területén, ugyanakkor nagy szerepe van a mindennapi életben, hiszen számtalanszor alkalmazzuk. Akármit is teszünk, legtöbbször logikusan felépítünk magunkban egy bizonyos sorrendet, melyet követünk. Akarva-akaratlan, tudatosan vagy spontán módon alakítunk ki naponta ismétlődő eljárásokat (algoritmusokat), amelyeket lépésenként hajtunk végre. A matematikában sok feladat valamilyen algoritmus segítségével oldható meg.

Definíció

Az idegen szavak szótára szerint: „Eredetileg Abdallah Mohamed Muza Alkhvarizmi arab matematikus számolási módszere, azóta minden számolási eljárás."

A matematikai kisenciklopédia, pedig így fogalmaz: „Az olyan eljárásokat, amelyek segítségével a kívánt eredményt az adatoktól függetlenül véges sok lépésben meg tudjuk határozni, algoritmusnak nevezzük...természetesen nem minden eljárás algoritmus."

Összefoglalva, az algoritmus a matematikából ered, de az informatika elterjedésével vált ismert fogalommá a köznyelvben is. Tulajdonképpen egy számolási módszer, eljárás melyet számos területen alkalmazunk, természetesen elsősorban a matematikában, illetve az informatikában.

Algoritmusok típusai

- **Egyszerű algoritmus (szekvencia)**: más szóval lineáris, elemi lépéseket hajtunk végre egymás után. Ilyenkor az a cél, hogy minél kevesebb lépésből jussunk el a feladat megoldásához.

- **Feltételes algoritmus (elágazás, szelekció)**: akkor beszélhetünk ilyen algoritmusról, ha a feladat nem oldható meg egyszerű lépések segítségével. A megoldás lépései egy bizonyos problémához vezetnek, ahol több eset is felmerülhet. Egy úgynevezett elágazással állhatunk szemben. Ilyenkor a helyzettől függően választanunk kell, hogy melyik lépés a helyes.

- **Ismétléses algoritmus (ciklus, iteráció)**: előfordulhat, hogy az algoritmus során vannak lépések, amelyeket többször is végre kell hajtanunk. Magát a feladatot, amit végrehajtunk, ciklusmagnak nevezzük.

Az egyik legfontosabb e témakörben Böhm–Jacopini tétele, mely szerint minden algoritmus felépíthető szekvencia, szelekció és iteráció segítségével.

Algoritmusok jellemzői, tulajdonságai

- Az algoritmus lépésekből áll, a lépések sorozatát *folyamatnak* nevezzük.
- Minden lépésnek, amit egymás után alkalmazunk, egyértelműnek kell lennie.
- Lehetnek összetett lépések is.
- Absztrakció, vagyis egy kiválogatási eljárás, mely alatt azt értjük, hogy az adatok (tárgyak) azon tulajdonságait vesszük csak figyelembe, amelyek fontosak az algoritmus végrehajtásánál.
- Mindig van valamilyen célja, vagyis egy változás történik a végrehajtás során.
- Bemenő adatokat használ fel.
- Kimenő adatokat hoz létre.
- Biztosítania kell, hogy a feladat véges számú lépésben megoldható legyen.
- Minél rövidebb idő alatt eljuthassunk a kívánt megoldáshoz, vagyis hatékonynak kell lennie.
- Megtervezésnél figyelni kell, hogy „elronthatatlan” legyen.

Ezek után nézzünk néhány, a középiskolában tanított algoritmust.

Euklideszi algoritmus

Az euklideszi algoritmus két szám legnagyobb közös osztójának meghatározására szolgáló módszer. Tulajdonképpen egy számelméleti algoritmus.
Menete: a két szám közül a nagyobbikat elosztjuk a kisebbikkel, majd a maradék lesz az osztó, az osztandó pedig az eddigi osztó és így tovább, míg 0 maradékot nem kapunk. Ebben az esetben az utolsó osztó lesz a keresett érték, vagyis a legnagyobb közös osztó. Ha már az elején, az első osztásnál 0 maradékot kapunk, akkor a kisebbik szám lesz egyben a legnagyobb közös osztója a két számnak.

Eratosztenészi szita

Ez egy olyan algoritmus, amely egy adott számnál nem nagyobb prímeket ad meg viszonylag egyszerű módon.
Írjuk fel 2-től N-ig az egész számokat. Az első lépésben karikázzuk be a 2-t, majd húzzuk át azokat a számokat, amelyek a 2 többszörösei és 2-nél nagyobbak...Ezután karikázzuk be azt a legkisebb számot, amely még nincs megjelölve..., majd húzzuk át ennek a többszöröseit...Ismételjük meg a fentieket mindig a legkisebb még jelöletlen számmal, ha ez a szám még legfeljebb $\sqrt{N}$. Ha már minden $\sqrt{N}$-nél nem nagyobb számot megjelöltünk, akkor álljunk meg. Ekkor a bekarikázott számok együttesen éppen az N-nél nem nagyobb prímszámokat adják.

Négyzetgyökvonás számológép nélkül

A menete a következő (konkrétan 301-re): Mindig kettesével, a tizedesvesszőtől balra jelöljük ki a számokat, tehát páratlan jegyűnél az első kijelölt egyjegyű lesz.

$$3|01 =$$

Megnézzük, hogy az első kijelölt számot milyen szám négyzetével tudjuk alulról közelíteni, ezt leírjuk az egyenlőség után,

$$3|01 = 1$$

majd visszaszorzunk, kivonunk és leírjuk az eredményt,

$$\begin{array}{l} 3|01 = 1 \\ 201 \end{array}$$

majd hozzá a következő két számjegyet. Vesszük az egyenlőségjel utáni számnak a kétszeresét, leírjuk.

$$\begin{array}{ll} 3|01 = 1 & 2 \\ 201 & \end{array}$$

A kétszeres után lesz egy helyi érték, egy szorzásjel, majd a szorzó. A kétszeres után írt szám ugyanaz lesz, mint a szorzó, ezzel ismét alulról közelítjük azt a számot, melyet a négyzetgyökjel alatti alá írunk.

$$\begin{array}{ll} 3|01 = 1 & 2?\cdot? \\ 201 & \end{array}$$

Ezek után visszaszorzunk, kivonunk és leírjuk a kivonás eredményét,

$$\begin{array}{ll} 3|01 = 1 & 27 \cdot 7 \\ 201 & \\ \ \ 12 & \end{array}$$

majd a következő két számjegyet, ha elérkeztünk a szám végéhez, akkor nullákat írunk, az eredménynél pedig kiírjuk a tizedesvesszőt és ugyan így tovább.

$$\begin{array}{ll} 3|01 = 17, & 34?\cdot? \\ 201 & \\ \ \ 1200 & \end{array}$$

Addig számolhatunk a leírt eljárás szerint, míg el nem jutunk a kívánt pontosságig.

Négyzetgyökvonás, Newton módszer

Newton nevéhez fűződő algoritmus egy rekurzív iteráció. Keressük a pozitív A szám négyzetgyökét!

$$a_1 = 1;\ \text{és}\ a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right);\ n \geq 2$$

Algoritmus helyességének igazolása

A képzési szabályra alkalmazva a számtani-mértani egyenlőtlenséget:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right) > \sqrt{a_{n-1} \cdot \frac{A}{a_{n-1}}} = \sqrt{A}; \qquad n \geq 2$$

Egyenlőség nem lehetséges, mert $a_1 = 1 < \sqrt{A}$, és innen adódik hogy minden a_i-re igaz ez.

Rendezzük át egy kicsit az algoritmust:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right) \\
2a_n &= a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}} \\
2a_n - 2\sqrt{A} &= a_{n-1} - \sqrt{A} + \frac{A}{a_{n-1}} - \sqrt{A} \\
2\left(a_n - \sqrt{A}\right) &= \left(a_{n-1} - \sqrt{A}\right) + \frac{A - a_{n-1}\sqrt{A}}{a_{n-1}} \\
2\left(a_n - \sqrt{A}\right) &= \left(a_{n-1} - \sqrt{A}\right) + \frac{\sqrt{A}}{a_{n-1}}\left(\sqrt{A} - a_{n-1}\right) \\
2\left(a_n - \sqrt{A}\right) &= \left(a_{n-1} - \sqrt{A}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{A}}{a_{n-1}}\right) \\
a_n - \sqrt{A} &= \frac{1}{2}\left(a_{n-1} - \sqrt{A}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{A}}{a_{n-1}}\right) < \frac{1}{2}\left(a_{n-1} - \sqrt{A}\right)
\end{aligned}$$

hiszen

$$0 < 1 - \frac{\sqrt{A}}{a_{n-1}} < 1$$

Ez azt jelenti, hogy

$$a_2 > a_3 > a_4 > \ldots \sqrt{A} \geq a_1 = 1$$

valamint a_i távolsága $\sqrt{A}$-tól az előző eltérés felénél is kisebb, azaz egyre közelebb lesz $\sqrt{A}$-hoz.

Akik már tanultak határértéket, azok számára: az a_i sorozat alulról korlátos (egy korlát $\sqrt{A}$) és szigorúan monoton csökken, tehát létezik határértéke, ami legyen H

$$\lim_{x \to \infty} a_n = H$$

Ekkor erre a határértékre igaz:

$$H = \frac{1}{2}\left(H + \frac{A}{H}\right)$$

amit megoldva

$$H = \sqrt{A}$$

Geometriai algoritmusok

A teljesség igénye nélkül néhány geometriai algoritmus.

- Háromszög beírt körének megszerkesztése
- Háromszög köréírt körének megszerkesztése
- Háromszög magasságpontjának megszerkesztése
- Szabályos sokszög megszerkesztése

A szerkesztési leírásokat végrehajtva kapjuk meg a vár végeredményt.

Játék algoritmusok

Sok fejtörő játék, feladat megoldása is algoritmikus.

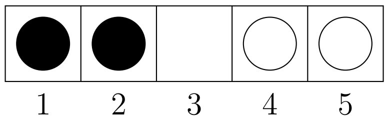
Az első forduló feladatai

Már az első forduló feladatainak kitűzésekor fontos megjegyezni, hogy a sikeres szerepléshez nem kell az összes feladatot megoldani. Az eredményeket az összes forduló teljesítménye alapján és évfolyamonként külön-külön értékeljük.

Az alábbi feladatok többségét nem csak az ismertetett módszerek segítségével lehet megoldani. A versenyben természetesen minden helyes megoldást maximális pontszámmal értékelünk.

Elvileg különböző második megoldásra az eredeti pontszám legfeljebb 50 %-a kapható.

1. Két fekete és két fehér dámafigurát az ábrának megfelelően helyezünk el.

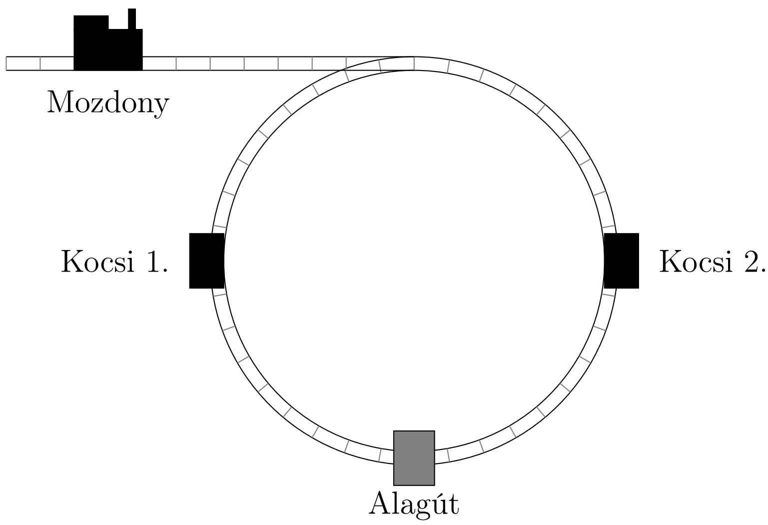


Az a feladat, hogy a fekete és fehér korongokat felcseréld (tehát az 1, 2 jelű mezőkön álló korongok kerüljenek a 4, 5 jelű mezőkre), az alábbi szabályők betartásával:

- Fehér figurával kell kezdeni az áthelyezést.
- Mindegyik figurát csak szomszédos mezőre lehet tenni, vagy egy másik korongot tartalmazó mezőt lehet átugrani (többet nem).
- Egyik figurát sem lehet visszatenni olyan helyre, ahol már volt.
- Egy mezőn csak egy figura állhat.

Adjunk egy megoldási módot! (6 pont)

2. Egy magányos mozdony önmagába visszatérő sínhurokhoz ér, amelyre állítható váltón át lehet behajtani. (Az ábra csak vázlat)



A hurokszakaszon két üres kocsi áll, amelyek között egy alagút található. Az alagúton egy kocsi átfér, de a mozdony már nem, és rövidebb egy vasúti kocsinál. A mozdonyvezetőnek meg kell cserélni a két kocsit úgy, hogy a munka végeztével el tudja hagyni a körpályát. A feladat megoldásának feltétele: a mozdony és a kocsik mindkét végén kapcsoló berendezés van. A vonatokat fékezők kísérik, akik a szükséges szét- és összekapcsolásokat utasításainknak megfelelően elvégzik (csak álló szerelvény esetén). A vasúti járműveket kímélni kell, ezért a kocsikat a mozdony ütközéssel nem guríthatja el, csak vonatással lehet helyet változtatni. (6 pont)

3. Igazoljuk, hogy az Eratosztenészi szita módszer jó, azaz tényleg csak a prímek maradnak vissza. (8 pont)

4. Módosítunk a négyzetgyökvonás Newton-i módszerén a következő módon:

$$a_1 = 1; \text{ és } a_n = \frac{1}{4}\left(3a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right); \; n \geq 2$$

a) Bizonyítsuk be, hogy az algoritmus továbbra is $\sqrt{A}$-t adja meg.
b) Jobb vagy rosszabb lett az algoritmusunk, azaz több vagy kevesebb lépést kell tennünk ugyanolyan pontosság eléréséhez? (10 pont)

5. Módosítunk a négyzetgyökvonás Newton-i módszerén a következő módon:

$$a_1 = 1; \text{ és } a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}^2}\right); \; n \geq 2$$

Határorozzuk meg, hogy most mit számol ki (ha egyáltalán kiszámol valamit) az algoritmus. (10 pont)

6. Bizonyítsuk be, hogy a „kézi” gyökvonás algoritmusa jó. Végezzük el vele $\sqrt{2022}$ kiszámolását 5 tizedesjegy pontosságra. (10 pont)

Beküldési határidő: 2022. március 13. 23^{59}
Beküldési cím: matoktport@gmail.com
Email tárgy: I. forduló megoldásai

A megoldásokat kérjük egy (1!) levélben beküldeni a könnyebb feldolgozás érdekében. A megoldások csatolás formájában kerüljenek a levélbe, kizárólag PDF formátumban. A csatolt file neve ékezetek nélküli legyen és tartalmazza a beküldő nevét, továbbá a forduló sorszámát is (esetleg a feladat sorszámát, ha csak 1 feladatot tartalmaz). Szóköz helyett a "_" karakter alkalmazandó! Példák csatolt file nevekre:
gipszjakab_fordulo1.pdf
gipszjakab_fordulo1_feladat01.pdf