A 2020. évi Kardos-Montágh Matematikaverseny első fordulójának megoldásai

10. osztály

1. feladat: *Határozzuk meg az m valós paraméter értékét úgy, hogy a másodfokú $x^2 - mx + m - 1 = 0$ és $x^2 - (m+2)x + 6 = 0$ egyenleteknek pontosan egy közös gyöke legyen.*

I. Megoldás. *(Szigeti Péter dolgozata alapján)*

Ha a két egyenletnek van közös gyöke, akkor az annak az egyenletnek is gyöke lesz, amelyet a két egyenlet megfelelő oldalainak kivonásával kapunk. A két egyenlet különbségével adódó egyenlet viszont elsőfokú, így csak ennek megoldása lehet a közös gyök.

$$x^2 - mx + m - 1 = 0, \tag{1}$$
$$x^2 - (m+2)x + 6 = 0. \tag{2}$$

(1)-(2) kivonás elvégzése után

$$2x + m - 7 = 0,$$

$$x = \frac{7-m}{2}.$$

Paraméteresen ez tehát a közös gyök. Az első egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\left(\frac{7-m}{2}\right)^2 - m\left(\frac{7-m}{2}\right) + m - 1 = 0,$$

$$m^2 - 14m + 49 - 2m(7-m) + 4m - 4 = 0,$$

$$3m^2 - 24m + 45 = 0,$$

$$m^2 - 8m + 15 = 0,$$

$$m = 3, \qquad m = 5.$$

Az $m = 3$ esetén a két egyenlet

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{és} \quad x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Ennek a két egyenletnek valóban egy közös gyöke van az $x = 2$.

Az $m = 5$ esetben a két egyenlet

$$x^2 - 5m + 4 = 0 \quad \text{és} \quad x^2 - 7x + 6 = 0.$$

A közös gyök ebben az esetben $x = 1$.

Az m paraméter lehetséges értékei $m = 3$ és $m = 5$.

II. Megoldás. *(Kardos Barnabás megoldása)*

Az első egyenlet gyökei meghatározhatók a megoldóképlettel:

$$x_{1.2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4m + 4}}{2} = \frac{m \pm (m-2)}{2},$$

tehát $x_1 = 1$ és $x_2 = m - 1$.

Itt érdemes megjegyezni, hogy a feladat megoldása során ez a két gyök biztosan különböző, hiszen $m = 2$ esetén a második egyenlet diszkriminánsa negatív lenne, egyáltalán nem lenne valós gyöke.

Ennek megfelelően két esetet kell megvizsgálnunk.

Felhasználjuk hogy a Viéte-formulák alapján a második egyenletben a gyökök szorzata 6, a gyökök összege pedig $m + 2$.

Ha $x_1 = 1$ a közös gyök, akkor a gyökök szorzata alapján a másik gyök csak a 6 lehet, így a gyökök összege $m + 2 = 7$ és $m = 5$. Ha $x_2 = m - 1$ a közös gyök akkor most a gyökök összege alapján a másik gyök a 3 és a gyökök szorzatából:

$$3(m-1) = 6, \quad m = 3.$$

Az m paraméter lehetséges értékei $m = 3$ és $m = 5$.

Végül mindkét megoldáshoz ellenőrzésképpen:

$m = 5$ esetén a két egyenlet a gyökeivel:

$$x^2 - 5m + 4 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4,$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_3 = 6.$$

Míg $m = 3$ esetén:

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \quad x_1 = 2, \; x_2 = 1,$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_3 = 3.$$

2. feladat *Adja meg az egyenlet valós megoldásait:*

$$\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}.$$

Megoldás. *(Hortobágyi András megoldása alapján)*

A négyzetgyökjelek alatt csak nemnegatív számok lehetnek, így az első gyökös kifejezés $x \in]-\infty, 1] \bigcup [2, +\infty[$, a másik $x \in]-\infty, 3] \bigcup [4, +\infty[$ intervallumokban értelmezhető. Az egyenlet megoldásai ennek a két halmaznak a metszetében lehetnek:

$$x \in]-\infty, 1] \bigcup [2, 3] \bigcup [4, +\infty[.$$

Mint későbbiekben kiderül ez a megoldás szempontjából most nem jelent semmiféle valódi megkötést. A folytatásban vigyük át az egyik gyökös kifejezést az egyenlet másik oldalára, majd emeljünk négyzetre:

$$\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}-\sqrt{(x-1)(x-2)},$$

$$x^2-7x+12=2-2\sqrt{2(x^2-3x+2)}+x^2-3x+2,$$

$$2\sqrt{2(x^2-3x+2)}=4x-8$$

$$\sqrt{2x^2-6x+4}=2x-4.$$

Itt már látható, hogy a bal oldalon négyzetgyökös kifejezés áll, ezért a jobb oldal is legalább nulla, $x \geq 2$.

Újabb négyzetre emelés után:

$$2x^2-6x+4=4x^2-16x+16,$$

$$2x^2-10x+12=0,$$

$$x^2-5x+6=0,$$

$$x_1=2 \qquad \text{és} \qquad x_2=3.$$

Ellenőrzéskor látjuk, hogy $x_1=2$ esetén az első gyökös kifejezés nulla, a második $\sqrt{2}$, míg $x_2=3$ esetén a második gyökös kifejezés nulla, az első pedig $\sqrt{2}$.

3. feladat *Tudjuk, hogy az*

$$x^3 - 3x^2 + 2x + c$$

polinom egyik gyöke a másik gyök kétszerese. Határozzuk meg c értékét és a polinom gyökeit.

Megoldás. *(Takács Bendegúz megoldása alapján)*

Ha egy y szám a polinom gyöke, akkor tudjuk, hogy

$$y^3 - 3y^2 + 2y + c = 0. \tag{1}$$

Ha ennek a számnak a kétszerese is gyök, akkor az is teljesül, hogy

$$(2y)^3 - 3(2y)^2 + 2(2y) + c = 0. \tag{2}$$

Az (1) és (2) bal oldalait egyenlővé téve y-ra hiányos harmadfokú egyenlethez jutunk.

$$8y^3 - 12y^2 + 4y + c = y^3 - 3y^2 + 2y + c,$$
$$7y^3 - 9y^2 + 2y = 0.$$

Ennek az egyenletnek a gyökei y kiemelése, majd a másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján:

$$y(7y^2 - 9y + 2) = 0,$$
$$y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = \frac{2}{7}.$$

Ha az y olyan gyöke a polinomnak, amelynek a kétszerese is gyök, akkor az csak ezen y értékek közül kerülhet ki. (Kaptunk egy szükséges feltételt a gyökök közötti kapcsolatra.) A befejezéshez a Viéte-formulákat is felhasználjuk.

Ha $y = 0$, akkor a 0 lenne kétszeres gyöke a polinomnak, így a harmadik gyök csak a 3 lehetne, viszont ebben az esetben a polinom alakja:

$$y^2(y - 3) = y^3 - 3y^2.$$

Látjuk, hogy ez nem megfelelő, mert az elsőfokú tag együtthatója is nulla lenne. Ez az eset tehát nem ad megoldást.

Ha $y = 1$, akkor a polinom két gyöke 1 és 2, továbbá a másodfokú tag együtthatója alapján a harmadik gyök a nulla, így (szintén a harmadfokú Viéte-formulák alapján) c értéke is nulla. A polinom:

$$(x - 1)(x - 2)x = x^3 - 3x^2 + 2x,$$

gyökei $1, 2, 0$ és $c = 0$.

Legyen végül $y = \frac{2}{7}$. Ekkor a gyökök a másodfokú tag együtthatója alapján:

$$\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, 3 - \frac{6}{7} = \frac{15}{7}.$$

A polinom gyöktényezős alakban:

$$\left(x - \frac{2}{7}\right)\left(x - \frac{4}{7}\right)\left(x - \frac{15}{7}\right) = x^3 - \frac{21}{7}x^2 + \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{15}{7} + \frac{15}{7} \cdot \frac{2}{7}\right)x - \frac{120}{343}.$$

Összevonások után:

$$x^3 - 3x^2 + 2x - \frac{120}{343}.$$

A polinom gyökei: $\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{15}{7}$ és $c = -\frac{120}{343}$.

Két megoldása van a feladatnak.

11. évfolyam

1. feladat: *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:*

$$\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6.$$

I. Megoldás. *(Bokor Endre megoldása)*

Mivel a négyzetgyökvonás a valós számok halmazán csak pozitív és nulla értékekre van értelmezve, ezért az értelmezési tartomány $x \leqq 12$. Átalakítva az egyenletet:

$$\sqrt{12-x}=6-\sqrt[3]{24+x}.$$

Emeljük mindkét oldalt négyzetre, majd vezessük be a $\sqrt[3]{24+x}$ helyett az y új ismeretlent. Ekkor, felhasználva, hogy $x=y^3-24$, kapjuk, hogy

$$12-x=36-12\sqrt[3]{24+x}+(\sqrt[3]{24+x})^2,$$

$$12-y^3+24=36-12y+y^2,$$

$$y^3+y^2-12y=0.$$

Szorzattá alakítással:

$$y(y^2+y-12)=0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásával az egyenlet gyökei:

$$y_1=0, \qquad y_2=-4, \qquad y_3=3.$$

Az ezekhez tartozó x értékek rendre:

$$x_1=-24, \qquad x_2=-88, \qquad x_3=3.$$

Mindegyik kisebb, mint 12 és ellenőrzéssel is látjuk, hogy valóban ezek mind gyökei is az eredeti egyenletnek.

II. Megoldás. *(Szapanidu Szofia Athina megoldása)*

Vezessünk most be új ismeretlent a négyzetgyökös kifejezés helyett: $a=\sqrt{12-x}$. A négyzetgyökvonás miatt $a \geq 0,\ x \leq 12$. Ezzel számolva $x=12-a^2$. Most rendezzük az egyenletet úgy, hogy egyik oldalon csak a köbgyökös kifejezés álljon, majd a helyettesítést követően emeljük mindkét oldalt harmadik hatványra:

$$\sqrt[3]{24+x}=6-\sqrt{12-x},$$

$$\sqrt[3]{24+12-a^2}=6-a,$$

$$36-a^2=216-108a+18a^2-a^3.$$

Rendezés után pedig:

$$a^3-19a^2+108a-180=0.$$

Ha ennek az egyenletnek van racionális megoldása, akkor az egész (a főegyüttható egy), továbbá csak a 180 valamelyik osztója lehet. Néhány behelyettesítés után látjuk, hogy

$a = 3$ egy megoldás, emiatt a harmadfokú polinomból kiemelhető az $(a-3)$ gyöktényező. Most a polinomosztás helyett rövidítve:

$$a^3 - 3a^2 - 16a^2 + 48a + 60a - 180 = 0,$$

$$a^2(a-3) - 16a(a-3) + 60(a-3) = 0,$$

$$(a-3)(a^2 - 160 + 60) = 0.$$

Az egyenlet gyökei:

$$a_1 = 3, \qquad a_2 = 6, \qquad a_3 = 10.$$

Végül az ezekhez tartozó x értékek:

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = -24, \qquad x_3 = -88.$$

2. feladat *Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán:*

$$12x^5 - 8x^4 - 45x^3 + 45x^2 + 8x - 12 = 0.$$

I. Megoldás. *(Kotán Tamás megoldása alapján)*

Az egyenletnek nem gyöke a nulla. Ha behelyettesítünk az x helyére $\frac{1}{x}$-et, majd az egyenlet mindkét oldalát $-x^5$-nel megszorozzuk, akkor visszakapjuk az eredeti egyenletet. Ez pontosan azt jelenti, hogy ha egy szám (valós vagy komplex) gyöke az egyenletnek, akkor a reciproka is gyöke az egyenletnek. (Az ilyen egyenleteket *reciprokegyenleteknek* nevezzük.) Az egyenlet gyökeit eszerint párba állítva a páratlan fokszám miatt látható, hogy van egy olyan gyök, amely csak önmagának lehet a párja. Az a szám, amely egyenlő a reciprokával csak az 1 vagy a -1 lehet. A feladatban szereplő egyenletnek ezek közül az $x_1 = 1$ a megoldása. Ezután az $(x-1)$ gyöktényező kiemelhető a nullára rendezett egyenletből:

$$12(x^5 - 1) - 8x(x^3 - 1) - 45x^2(x - 1) = 0,$$

$$(x - 1)(12x^4 + 12x^3 + 12x^2 + 12x + 1 - 8x^3 - 8x^2 - 8x - 45x^2) = 0,$$

$$(x - 1)(12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12) = 0.$$

Meg kell még oldanunk a

$$12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12 = 0$$

egyenletet, amely ezek szerint reciprokegyenlet. Az előző feladat második megoldásában is szereplő (Rolle-féle) kritérium alapján a racionális gyök számlálója a konstans tagnak, a nevezője a főegyütthatónak kell, hogy osztója legyen. Ennek alapján gyorsan megtalálható az $x_2 = -2$ megoldás. Tudjuk, hogy ennek reciproka az $x_3 = -\frac{1}{2}$ is megoldás. Ezek miatt biztos, hogy az egyenletből kiemelhető $(x+2)(2x+1) = 2x^2 + 5x + 2$. A kiemelés után

$$12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12 = (2x^2 + 5x + 2)(6x^2 - 13x + 6) = 0.$$

Ha a második tényező nulla, akkor kapjuk a hiányzó két gyököt:

$$6x^2 - 13x + 6 = 0,$$

$$x_4 = \frac{2}{3}, \qquad x_5 = \frac{3}{2}.$$

Végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, az egyenlet megoldásai:

$$x = 1, \quad -2, -\frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{3}{2}.$$

Megjegyzés: Az $(x-1)$ kiemelése után kapott negyedfokú egyenlet megoldására a sztenderd eljárás a következő: mivel az egyenletnek nem gyöke a nulla, ezért végig oszthatunk x^2-tel.

$$12x^2 + 4x - 41 + 4\frac{1}{x} + 12\frac{1}{x^2} = 0.$$

Kicsit rendezgetve:

$$12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 41 = 0. \tag{1}$$

Vezessünk most be új u ismeretlent az $x + \frac{1}{x}$ helyett. Ezt négyzetre emelve

$$u^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}.$$

Így már kézenfekvő a helyettesítés (1)-ben:

$$12(u^2 - 2) + 4u - 41 = 0,$$

$$12u^2 + 4u - 65 = 0.$$

Ennek gyökei a megoldóképlettel:

$$u_1 = -\frac{5}{2} \quad \text{és} \quad u_2 = \frac{13}{6}.$$

Visszahelyettesítve az u helyébe $\left(x + \frac{1}{x}\right)$-et kapjuk a fenti gyököket.

Ugyanennek a feladatnak a következő megoldása nagyon egyedi ötleten alapul, a versenyző ügyesen éri el, hogy homogén egyenletet kapjon.

II. Megoldás. *(Szapanidu Szofia Athina megoldása alapján)*

Az $(x - 1)$ gyöktényező kiemelése után meg kell még oldani az

$$12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12 = 0$$

egyenletet. A párokba rendezés után

$$12(x^4 + 1) + 4x(x^2 + 1) - 41x^2 = 0.$$

Vezessünk most be új ismeretlent az $(x^2 + 1)$ helyett. Legyen $a = x^2 + 1$, ezzel az egyenlet:

$$12a^2 - 24x^2 + 4xa - 41x^2 = 0,$$

$$12a^2 + 4xa - 65x^2 = 0.$$

Ez a-ra nézve egy paraméteres másodfokú egyenlet, amelynek megoldásai:

$$a_{1,2} = \frac{-4x \pm \sqrt{16x^2 + 3120x^2}}{24} = \frac{-4x \pm 56x}{24}.$$

Innen

$$a_1 = -\frac{5}{2}x, \qquad \text{és} \qquad a_2 = \frac{13}{6}x.$$

Most felhasználva, hogy $a = x^2 + 1$, kapunk két másodfokú egyenletet:

$$x^2 + 1 = -\frac{5}{2}x, \quad x^2 + 1 = \frac{13}{6}x,$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0, \quad 6x^2 - 13x + 6 = 0.$$

Azonnal adódnak az összes megoldások:

$$x \in \left\{1, -2, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}.$$

3. feladat *Határozzuk meg az* $a; b; c$ *paraméterek értékét úgy, hogy az*

$$x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c$$

polinom $(x-1)$*-gyel,* $(x-2)$*-vel,* $(x-3)$*-mal osztva rendre* $1, 2, 3$ *maradékot adjon.*

Megoldás.

Jelöljük a feladatban szereplő polinomot $f(x)$-szel. A feltételek alapján, ha az $f(x)-1$ polinomot tekintjük, akkor ebből az $(x-1)$ tényező kiemelhető. Ez azt jelenti, hogy ennek a polinomnak az $x = 1$ az egyik gyöke, vagyis behelyettesítve ebbe a polinomba $x = 1$-et nullát fogunk kapni.

$$f(1) - 1 = 1 + 1 + a + b + c - 1 = 0.$$

Ebből az első lineáris egyenlet $a,\ b,\ c$ együtthatóinkra vonatkozóan:

$$a + b + c = -1. \tag{1}$$

Másodszor tekintsük az $f(x) - 2$ polinomot. Ezt a polinomot $(x - 2)$-vel osztva a nulla lesz a maradék, tehát ennek a polinomnak gyöke a 2. Behelyettesítéssel:

$$16 + 8 + 4a + 2b + c - 2 = 0,$$

$$4a + 2b + c = -22. \tag{2}$$

Végül ugyanezzel a megfontolással $(x - 3)$ kiemelhető az $f(x) - 3$ polinomból, vagyik ennek a polinomnak gyöke a 3.

$$81 + 27 + 9a + 3b + c - 3 = 0,$$

$$9a + 3b + c = -105. \tag{3}$$

Az (1), (2), (3) egyenletek egy lineáris, háromismeretlenes egyenletrendszert határoznak meg. Ennek megoldására többféle lehetőség is rendelkezésre áll. Az egyik legegyszerűbb és leggyorsabb talán az, ha kihasználjuk az egyenletek együtthatói közötti kényelmes kapcsolatokat. Vonjuk ki az első egyenletet a másik kettőből:

$$\text{(2)-(1)} \qquad 3a + b = -21. \tag{4}$$

$$\text{(3)-(1)} \qquad 8a + 2b = -104. \tag{5}$$

Az (5) egyenlet mindkét oldalát kettővel osztva majd ebből kivonva a (4) egyenletet kapjuk, hogy

$$a = -31.$$

Ezt beírva (4)-be azonnal

$$b = 72.$$

Végül az (1) egyenlet alapján

$$-31 + 72 + c = -1,$$

$$c = -42.$$

Az $x^4 + x^3 - 31x^2 + 72x - 42$ polinomba sorra az $1,\ 2,\ 3$-at helyettesítve megkapjuk az $1,\ 2,\ 3$ maradékokat. A keresett paraméterek:

$$a = -31, \quad b = 72, \quad c = -42.$$

Megjegyzések.

1. A feladatot sikeresen megoldó három versenyző - Bokor Endre, Szapanidu Szofia Athina és Tóth János - polinomosztás segítségével dolgozott, bár ennek a konkrét kivitelezését mindannyian kicsit másként végezték. A megoldás szempontjából azonban a lényeges az, hogy elosztották az $f(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomot az $(x - 1)$ polinommal:

$$x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c = (x - 1)(x^3 + 2^2 + (a + 2)x + (a + b + 2) + (a + b + c + 2).$$

A maradékról tudjuk, hogy 1-gyel egyenlő, ebből

$$a + b + c = -1.$$

A polinomosztással rendre megkapható az együtthatók közötti három lineáris egyenlet.

2. *Bokor Endre* a lineáris egyenletrendszert Cramer-szabállyal oldotta meg.

Az egyenletrendszer mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ez a mátrix reguláris, $\det A = -2$, így az egyenletrendszernek van egyértelmű megoldása. Az egyes oszlopok cseréjével:

$$D_a = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -22 & 2 & 1 \\ -105 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 62, \quad D_b = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -22 & 1 \\ 9 & -105 & 1 \end{vmatrix} = -144, \quad D_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -22 \\ 9 & 3 & -105 \end{vmatrix} = 84.$$

$$a = \frac{D_a}{\det A} = -31, \quad b = \frac{D_b}{\det A} = 72, \quad c = \frac{D_c}{\det A} = -42.$$

12. évfolyam

1. feladat: *Adja meg az egyenlet összes megoldását a valós számok halmazán :*

$$x+9-19\sqrt{\frac{x+9}{x-15}}-\frac{560}{x-15}=0.$$

I. Megoldás. *(Major Botond megoldása)*

Először nézzük meg, hogy mi az értelmezési tartománya az egyenlet bal oldalán álló függvénynek. Mivel az $x-15$ szerepel a nevezőben, nem lehet nulla, tehát $x \neq 15$. A négyzetgyökjel alatt csak nemnegatív kifejezés állhat, ezért $\frac{x+9}{x-15} \geq 0$. Ez akkor teljesül, ha $x+9$ és $x-15$ azonos előjelűek. Ebből azt kapjuk, hogy $x \leq -9$ vagy $x > 15$. Ezzel megkaptuk, hogy milyen tartományokban keressük a gyököket.

Az értelmezési tartományban $x \neq 15$, ezért az egyenlet mindkét oldalát megszorozhatjuk $(x-15)$-tel. A szorzás után 2 esetre kell bontani a megoldást: amikor $x-15>0$, illetve amikor $x-15<0$.

I. eset: $x-15>0$

Itt pozitív számmal szoroztunk, ezért nyugodtan bevihetjük a gyökjel alá. Ezután a következő formájú lesz az egyenlet:

$$a^2-19a-560=0, \quad \text{ahol} \quad a=\sqrt{(x+9)(x-15)}.$$

Ennek az egyenletnek a gyökei: $a_1=35$ és $a_2=-16$. Az a jelölést négyzetgyökös kifejezés helyett vezettük be, $a \geq 0$, azaz csak $a=35$ adhat helyes megoldást.

A gyökös egyenlet így

$$\sqrt{(x+9)(x-15)}=35.$$

Mindkét oldalt négyzetre emeljük, a zárójelet kibontjuk, illetve az egyenletet egy oldalra rendezzük. Ezek után az

$$x^2-6x-1360=0$$

egyenlethez jutunk, amelynek gyökei a következők:

$$x_1=40 \quad \text{és} \quad x_2=-34.$$

A kezdeti feltétel ebben az esetben az volt, hogy $x>15$, ezért csak az $x=40$ a valódi megoldás. Ezzel az első esetet megoldottuk.

II. eset: $x-15<0$

Most $x-15<0$, ezért az $x+9$ is kisebb 0-nál. Ezek után csak úgy tudjuk bevinni a négyzetgyökjel alá az $x-15$-t, ha kiemelünk (-1)-et. Ekkor az egyenlet a következő formájúvá válik:

$$b^2+19b-560=0, \quad \text{ahol} \quad b=\sqrt{(x+9)(x-15)}.$$

Ezt az egyenletet b-re megoldva a két gyök:

$$b_1=16 \quad \text{és} \quad b_2=-35.$$

Mivel $b \geq 0$, ezért csak a $b=16$ lehet a jó.

Ebből következik, hogy

$$\sqrt{(x+9)(x-15)}=16.$$

Mindkét oldalt négyzetre emeljük, a zárójelet kibontjuk, továbbá rendezzük az egyenletet. Ezek után az $x^2 - 6x - 391 = 0$ egyenlethez jutunk, melynek gyökei a következők:

$$x_1 = 23 \text{ és } x_2 = -17.$$

A kezdeti feltétel ennél az esetnél az volt, hogy $x \leq -9$, ezért csak az $x = -17$ a helyes megoldás.

Tehát az eredeti egyenletnek két megoldása van:

$$x_1 = 40 \text{ és } x_2 = -17,$$

melyek beleesnek a megfelelő intervallumokba, és mivel ekvivalensek az átalakítások, valóban kielégítik az eredeti egyenletet.

Ellenőrzés:

$$x = 40 \to 49 - 19\sqrt{\frac{49}{25}} - \frac{560}{25} = 49 - \frac{133}{5} - \frac{112}{5} = 0,$$
$$x = -17 \to -8 - 19\sqrt{\frac{-8}{-32}} - \frac{560}{-32} = -8 - \frac{19}{2} + \frac{35}{2} = 0.$$

II. Megoldás. *(Telek Zsigmond megoldása)*

Behelyettesítéssel azonnal kapjuk, hogy $x = -9$ nem megoldás, így a gyök alatti kifejezés és így a tört gyöke is határozottan pozitív. Legyen $a := \sqrt{\frac{x+9}{x-15}}$, és fejezzük ki az x-et és az egyenletben szereplő összes tagokat ezzel az új ismeretlennel.

$$a^2 = \frac{x+9}{x-15} = 1 + \frac{24}{x-15},$$

$$a^2 - 1 = \frac{24}{x-15} \neq 0, \text{ vagy más alakban: } x - 15 = \frac{24}{a^2-1}.$$

(Itt az is látható, hogy $a^2 - 1 \neq 0$.) Ebből már adódnak az egyenlet egyes tagjai is:

$$x + 9 = \frac{24}{a^2-1} + 24 = \frac{24a^2}{a^2-1}, \quad -\frac{560}{x-15} = -(a^2-1)\frac{560}{24}.$$

Ezekkel a helyettesítésekkel az eredeti egyenlet:

$$\frac{24a^2}{a^2-1} - 19a - (a^2-1)\frac{70}{3}.$$

Néhány lépéssel korábban láttuk, hogy $a^2 - 1 \neq 0$, így az egyenletet eloszthatjuk ezzel.

$$\frac{24a^2}{(a^2-1)^2} - 19\frac{a}{a^2-1} - 703.$$

Ez egy másodfokú egyenlet $y = \frac{a}{a^2-1}$-re nézve,

$$24y^2 - 19y - \frac{70}{3} = 0.$$

Ennek gyökei

$$y_1 = -\frac{2}{3} \quad \text{és} \quad y_2 = \frac{35}{24}.$$

Az a-ra így két másodfokú egyenletet kapunk:

$$\frac{a}{a^2-1} = -\frac{2}{3} \quad \text{és} \quad \frac{a}{a^2-1} = \frac{35}{24}.$$

Ezek megoldásával

$$-3a = 2a^2 - 2, \qquad 24a = 35a^2 - 35,$$

$$2a^2 + 3a - 2 = 0, \qquad 35a^2 - 24a - 35 = 0,$$

$$a_1 = -2, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{5}{7}, \quad a_4 = \frac{7}{5}.$$

Az a csak pozitív értékeket vehet fel, tehát ezek közül csak kettő fog megoldást adni az eredeti egyenletre:

$$\sqrt{\frac{x+9}{x-15}} = \frac{1}{2}, \qquad \sqrt{\frac{x+9}{x-15}} = \frac{7}{5},$$

$$\frac{x+9}{x-15} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{x+9}{x-15} = \frac{49}{25},$$

$$4x + 36 = x - 15, \qquad 25x + 225 = 49x - 735,$$

$$x = -17, \qquad x = 40.$$

A lépések ekvivalens átalakítások voltak, az egyenletnek pontosan ez a két valós szám a megoldása.

Megjegyzés. Telek Zsigmond egyik megoldásában az értelmezési tartomány meghatározása után differenciálszámítással dolgozott. Tisztázta, hogy az

$$f(x) = x + 9 - 19\sqrt{\frac{x+9}{x-15}} - \frac{560}{x-15}$$

függvény értelmezési tartománya a $]-\infty, -9] \bigcup]15, +\infty[$ halmaz. Miután az $x = -9$ nem zérushelye a függvénynek, ezért az értelmezési tartomány valójában két nyílt intervallum egyesítése. Ezután bizonyította, hogy a függvény deriváltja, ahol a differenciálás elvégezhető (és ezért kellett az $x = -9$ vizsgálata) mindig pozitív. A függvény mindkét nyílt intervallumban szigorúan monoton növekedő, tehát legfeljebb két zérushelye lehet. Az egyenletnek legfeljebb két megoldása van, amelyeket aztán közölt és behelyettesítéssel ellenőrizte, hogy valóban megoldások.

2. feladat: *Keresse meg az egyenlet valós megoldásait:*

$$\frac{1}{\log_6(3+x)}+\frac{2\log_{0,25}(4-x)}{\log_2(3+x)}=1.$$

I. Megoldás. *(Tiefenbeck Flórián megoldása)*

Először adjuk meg az értelmezési tartományt. A logaritmusokat csak pozitív számokra tudjuk értelmezni, emiatt $-3<x<4$, továbbá a nevezőben szereplő logaritmus nem veheti fel a nulla értékét, tehát $x\neq -2$.

Ezután a logaritmus azonosságai alapján írjuk át mindegyik logaritmust kettes alapra:

$$\log_6(3+x)=\frac{\log_2(3+x)}{\log_2 6},\quad \text{és}\quad 2\log_{0,25}(4-x)=\frac{2\log_2(4-x)}{\log_2 0,25}=-\log_2(4-x).$$

Ezekkel átírva az egyenlet bal oldalát:

$$\frac{\log_2 6}{\log_2(3+x)}-\frac{\log_2(4-x)}{\log_2(3+x)}=1.$$

A nemnulla nevezővel beszorozva és a második azonosság alkalmazása után:

$$\log_2\left(\frac{6}{4-x}\right)=\log_2(3+x).$$

A 2-alapú logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt a logaritmusok argumentumai is egyenlők, így egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$\frac{6}{4-x}=3+x,$$
$$6=(4-x)(3+x),$$
$$x^2-x-6=0.$$

Ennek gyökei $x_1=3$ és $x_2=-2$, melyek közül csak az első lehet megoldás a feltételek miatt.

Ellenőrzés: $\frac{1}{\log_6 6}+\frac{2\log_{0,25}1}{\log_2 6}=1+0=1$.

Az egyenlet megoldása: $x=3$.

II. Megoldás. *(Szünder Barna Ferenc megoldása)*

Az értelmezési tartomány pontos meghatározása az első megoldással egyezően történt. Ezután kettes alapú logaritmus helyett most tízes alapú logaritmusokat használt. Mindegyik logaritmikus kifejezést (az első megoldásnál látott lépésekben) átírt tízes alapra. Így az egyenlet:

$$\frac{\lg 26}{\lg(3+x)}-\frac{\lg(4-x)}{\lg(3+x)}=1,$$
$$\lg 6-\lg\,(4-x)=\lg\,(3+x).$$

A $\lg 6$ egy konstans. Az $f(x)=\lg(4-x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő konkáv függvény, emiatt a $g(x)=-\lg(4-x)$ szigorúan monoton növekedő és konvex függvény. A bal oldal eszerint egy szigorúan monoton növekedő konvex függvénynek, míg a jobb oldal egy szigorúan monoton növekedő konkáv függvénynek felel meg. Két ilyen függvény grafikonjának geometriai okból legfeljebb két metszéspontja lehet. Ezek könnyen megtalálhatók: $x=3$ és $x=-2$, de tudjuk, hogy utóbbi nem lehetséges, mert az eredeti egyenletben nulla szerepelne a nevezőben.

Az egyetlen megoldás az $x=3$.

3. feladat: *Igazoljuk, hogy ha a, b, c és d különböző egész számok, továbbá tudjuk, hogy az $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)-4$ polinomnak gyöke a q egész, akkor $q = \frac{a+b+c+d}{4}$.*

Megoldás. *(Péter Kristóf megoldása)*

A q egész szám gyöke az adott polinomnak, tehát

$$(q-a)(q-b)(q-c)(q-d)-4=0.$$

Az egyes tényezők is egészek, sőt mind különböző egészek a feltétel miatt, így a

$$(q-a)(q-b)(q-c)(q-d)=4$$

szorzatban négy különböző egész szám szorzataként kell előállítani a 4-et. A tényezők mindegyike osztója a 4-nek, tehát mindegyik egy-egy különböző eleme a

$$\{-4,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 4\}$$

halmaznak. Ha valamelyik tényező 4 vagy -4 lenne, akkor a maradék három tényező már csak a az 1 és a -1 közül kerülhetne ki, vagyis a skatulyaelv alapján bizotsan lenne közöttük legalább két egyforma. A 4-et és a -4-et tehát ki kell zárnunk a lehetséges osztók, tényezők közül. Így viszont pontosan négy különböző osztója maradt csak a 4-nek, tehát valamilyen sorrendben ezek lesznek a $(q-a)$, $(q-b)$, $(q-c)$, $(q-d)$ tényezők. Vegyük most az összegüket, akkor

$$q-a+q-b+q-c+q-d=(-2)+(-1)+1+2=0,$$

$$4q=a+b+c+d,$$

tehát q valóban a négy egész szám számtani közepe.

Desszert - feladatok minden résztvevőnek

1. feladat: *Adja meg az egyenlet valós megoldásait:*

$$(x^2+9x-7)^3+(2x^2-7x+6)^3=(3x^2+2x-1)^3.$$

I. Megoldás. *(Major Botond megoldása)*

Legyen $a=x^2+9x-7$ és $b=2x^2-7x+6$. Mivel $a+b=3x^2+2x-1$, az eredeti egyenlet a következő alakúvá válik:

$$a^3+b^3=(a+b)^3.$$

A jobb oldalt azonosság alapján kibontva, majd rendezés után szorzattá alakítva:

$$a^3+b^3=a^3+b^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2,$$

$$ab(a+b)=0.$$

Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Tehát a fenti egyenlet akkor teljesül, ha: (1) $a=0$ vagy
(2) $b=0$ vagy
(3) $a+b=0$.

Az (1)-es egyenletből (visszahelyettesítve) az $x^2+9x-7=0$ egyenlet lesz, melynek gyökei:

$$x_1=\frac{-9-\sqrt{109}}{2} \quad \text{és} \quad x_2=\frac{-9+\sqrt{109}}{2}.$$

A (2)-es egyenletből (visszahelyettesítve) az $2x^2-7x+6=0$ egyenlet lesz, melynek gyökei:

$$x_3=2 \quad \text{és} \quad x_4=\frac{3}{2}.$$

A (3)-as egyenletből (visszahelyettesítve) az $3x^2+2x-1=0$ egyenlet lesz, melynek gyökei:

$$x_5=-1 \quad \text{és} \quad x_6=\frac{1}{3}.$$

Tehát az egyenletnek 6 különböző gyöke van, melyek a következők:

$$x_1=\frac{-9-\sqrt{109}}{2},\ x_2=\frac{-9+\sqrt{109}}{2},\ x_3=2,\ x_4=\frac{3}{2},\ x_5=-1 \ \text{ és } \ x_6=\frac{1}{3}.$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért ezek valóban megoldások és csak ezek megoldások.

II. Megoldás. *(Péter Kristóf megoldása)*

Az $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ azonosság felhasználásával az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható.

$$[(x^2+9x-7)+(2x^2-7x+6)]\cdot[(x^2+9x-7)^2-(x^2+9x-7)(2x^2-7x+6)+(2x^2-7x+6)^2]=(3x^2+2x-1)^3,$$

$$(3x^2+2x-1)\cdot[(x^2+9x-7)^2-(x^2+9x-7)(2x^2-7x+6)+(2x^2-7x+6)^2]=(3x^2+2x-1)^3.$$

Ha $3x^2+2x-1=0$, akkor teljesül az egyenlőség, ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei megoldásai lesznek az eredeti egyenletnek:

$$x_1=-1, \quad \text{és} \quad x_2=\frac{1}{3}.$$

A továbbiakban már feltehetjük, hogy $3x^2+2x-1\neq 0$ és egyszerűsíthetünk ezzel a tényezővel. Az egyenlet így már ,,csak" negyedfokú:

$$(x^2+9x-7)^2-(x^2+9x-7)(2x^2-7x+6)+(2x^2-7x+6)^2=(3x^2+2x-1)^2.$$

Vonjunk ki mindkét oldalból $(2x^2-7x+6)^2$-et és alakítsuk mindkét oldalt szorzattá.

$$(x^2+9x-7)^2-(x^2+9x-7)(2x^2-7x+6)=(3x^2+2x-1)^2-(2x^2-7x+6)^2,$$

$$(x^2+9x-7)[(x^2+9x-7)-(2x^2-7x+6)]=[(3x^2+2x-1)+(2x^2-7x+6)]\cdot[(3x^2+2x-1)-(2x^2-7x+6)],$$

$$(x^2+9x-7)(-x^2+16x-13)=(5x^2-5x+5)(x^2+9x-7).$$

Most látható, hogy $x^2+9x-7=0$ esetén az egyenlet mindkét oldala nulla, ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei is megoldásai az eredeti egyenletnek:

$$x_3=\frac{-9-\sqrt{109}}{2}, \quad \text{és} \quad x_4=\frac{-9+\sqrt{109}}{2}.$$

A továbbiakban feltehetjük, hogy x^2+9x-7 sem nulla, így újabb egyszerűsítést követően már csak egy másodfokú egyenlet marad:

$$-x^2+16x-13=5x^2-5x+5,$$

$$6x^2-21x+18=0,$$

$$2x^2-7x+6=0.$$

Ennek gyökei:

$$x_5=2, \quad \text{és} \quad x_6=\frac{3}{2}.$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1=\frac{-9-\sqrt{109}}{2},\ x_2=\frac{-9+\sqrt{109}}{2},\ x_3=2,\ x_4=\frac{3}{2},\ x_5=-1\ \text{ és }\ x_6=\frac{1}{3}.$$

Végül egy egészen extra ötlet, amelyre egy egyenlet megoldása során legtöbben biztos, hogy nem gondolunk.

III. Megoldás. *(Tiefenbeck Flórián megoldása)*

Keressük először az egyenlet racionális megoldásait, viszont ha x racionális, akkor a zárójelben lévő kifejezések is racionálisak. A Nagy Fermat-tétel miatt így az egyenlet csak akkor teljesülhet, ha valamelyik zárójelben álló kifejezés értéke nulla.

Ennek bizonyításához tegyük fel, hogy

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{c}{d}\right)^3=\left(\frac{e}{f}\right)^3,$$

ahol a, b, c, d, e, f mind egész számok és b, d, f egyike sem nulla. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $(bdf)^3$-nal, akkor

$$(adf)^3 + (cbf)^3 = (ebd)^3,$$

Ezek egész számok, két köbszám összege egy harmadik köbszám. A Nagy Fermat-tétel alapján ez csak úgy lehetséges, ha valamelyik számláló, azaz valamelyik tört nulla.

Legyen $\frac{a}{b} = x^2 + 9x - 7$, $\frac{c}{d} = 2x^2 - 7x + 6$ és $\frac{e}{f} = 3x^2 + 2x - 1$. Vizsgáljuk először azt az esetet, ha ez utóbbi tört nulla. A $3x^2 + 2x - 1 = 0$ egyenlet gyökei

$$x_1 = -1 \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

Helyettesítsük be az $x_1 = -1$ értéket az egyenlet másik két másodfokú kifejezésébe:

$$\frac{a}{b} = x^2 + 9x - 7 = -15, \quad \frac{c}{d} = 2x^2 - 7x + 6 = 15.$$

E két szám köbének összege 0, tehát megkaptuk az eredeti egyenlet egy megoldását. Most hasonlóképpen számoljuk ki az egyes másodfokú kifejezések értékét, ha $x_2 = \frac{1}{3}$.

$$\frac{a}{b} = x^2 + 9x - 7 = -\frac{35}{9}, \quad \frac{c}{d} = 2x^2 - 7x + 6 = \frac{35}{9}.$$

Ezek is egymás ellentettjei, tehát az $x_2 = \frac{1}{3}$ is megoldása az eredeti egyenletnek.

Legyen most $2x^2 - 7x + 6 = 0$. Ekkor majd annak teljesülését kell vizsgálni, hogy $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ egyenlők-e.

$$2x^2 - 7x + 6 = 0,$$

$$x_3 = 2, \quad \text{és} \quad x_4 = \frac{3}{2}.$$

Ha $x_3 = 2$, akkor

$$\frac{a}{b} = x^2 + 9x - 7 = 15, \frac{e}{f} = 3x^2 + 2x - 1 = 15.$$

Míg, ha $x_4 = \frac{3}{2}$-et helyettesítünk, akkor

$$\frac{a}{b} = x^2 + 9x - 7 = \frac{35}{4}, \frac{e}{f} = 3x^2 + 2x - 1 = \frac{35}{4}.$$

Ezzel az eredeti hatodfokú egyenletnek további két megoldását kaptuk meg. A harmadik másodfokú kifejezés, az $x^2 + 9x - 7$ zérushelyei nem racionálisak, így a hiányzó megoldásokat (két megoldást) más úton kell meghatároznunk. A versenyző itt azt az utat választotta, hogy nullára rendezte a hatodfokú egyenletet majd kiemelte a $(3x^2 + 2x - 1)$ és $(2x^2 - 7x + 6)$ tényezőket.

$$18x^6 + 11x^5 - 579x^4 + 468x^3 + 453x^2 - 561x + 126 = 0,$$

$$(3x^2 + 2x - 1)(2x^2 - 7x + 6)(3x^2 + 27x - 21) = 0.$$

Látható, hogy már csak a

$$3x^2 + 27x - 21 = 0,$$

$$x^2 + 9x - 7 = 0$$

egyenlet gyökeit kell meghatároznunk. Ezek:

$$x_5 = \frac{-9 - \sqrt{109}}{2}, \quad \text{és} \quad x_6 = \frac{-9 + \sqrt{109}}{2}.$$

2. feladat: *Legyenek a és b tetszőleges valós számok. Keresssük meg a következő kifejezés minimumát:*

$$6a^2 + 3b^2 - 4ab - 8a - 2b + 11.$$

I. Megoldás. *(Bokor Endre megoldása)*

A kifejezés ekvivalens átalakításokkal konstans eltéréssel teljes négyzetek összegévé alakítható.

$$6a^2 + 3b^2 - 4ab - 8a - 2b + 11 = 2a^2 - 4ab + 2b^2 + 4a^2 - 8a + 4 + b^2 - 2b + 1 + 6 =$$

$$= 2(a - b)^2 + 4(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + 6.$$

Innen adódik, hogy a kifejezés legkisebb értéke legalább 6. Ez azonban csak akkor lesz a tényleges minimum, ha megadható olyan a és b, amelyekre mindhárom teljes négyzet nulla. Ez be is következik $a = b = 1$ esetén.

A kifejezés minimuma 6, amelyet $a = b = 1$ esetén vesz fel.

II. Megoldás. *(Telek Zsigmond megoldása)*

Egy jóval nehezebb azonos átalakítást követően most egy teljes négyzet számszorosának és egy másodfokú egyváltozós polinomnak az összegévé alakítjuk a kétváltozós polinomot.

$$6a^2 + 3b^2 - 4ab - 8a - 2b + 11 = \frac{2}{3}(3a - b - 2)^2 + \frac{1}{3}(7b^2 - 14b + 25).$$

Az első tag legalább nulla. Ha meghatározzuk, hogy a második másodfokú polinom mely b-re minimális, majd meg tudunk adni ehhez olyan a-t, amelyre ugyanakkor az első négyzet nulla, akkor megtaláltuk a minimumot. A $7b^2 - 14b + 25 = 7(b - 1)^2 + 18$ láthatóan $b = 1$-nél veszi fel minimumát. Ehhez kell úgy megadnunk az a értékét, hogy az első négyzetben nulla legyen. Láthatóan ez $a = 1$-nél be is következik.

Tehát a minimumot $a = b = 1$ esetén veszi fel a kétváltozós polinom, amelynek értéke, a minimum 6.

Megjegyzések.

1. A feladatot sikerrel megoldók többsége az első megoldás szerinti utat választotta. Valószínűleg ez a természetesebb módszer. PL.

$$x(a - b)^2 + (6 - x)(a - y)^2 + (2 - x)(b - z)^2$$

kibontásával és az eredeti kétváltozós polinommal történő összehasonlítással gyorsan megtalálhatók: $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$.

2. Érdekes utat választott Szünder Barna Ferenc és Kotán Tamás. Konstans b paraméter esetén keresték az $f(a) = 6a^2 + (-4b - 8)a + (3b^2 - 2b + 11)$ minimumhelyét. Ezt megtalálták az $a = \frac{b+2}{3}$ helyen. Ezután az a helyébe írva ezt az értéket már egyváltozós polinomot kaptak b-re. Ez pedig a minimumát a $b = 1$ helyen veszi fel, amit visszaírva az eredeti kifejezésbe kapjuk, hogy $a = 1$, továbbá a minimum 6. A megoldás csak abban az esetben teljes, ha a leírásból kiderül, hogy tetszőleges a-ra a minimumot $\frac{b+2}{3}$-nál veszi fel, tehát ha az összes b-re megnézzük ezeket a másodfokúakat, akkor az összes lehetséges a-ra a minimumokat tekintve a kétváltozós polinomhoz tartozó paraboloid parabolametszeteinek alsó pontjai között keressük meg a minimálisat, így ez tényleg az abszolút minimumhely.

3. *Telek Zsigmond* kétváltozós függvények deriválásával is adott egy megoldást. Az első parciális deriváltak eltűnése egy-egy elsőfokú kétismeretlenes egyenletet ad a-ra és b-re. Ennek egyetlen megoldása $a = b = 1$. Ez egy szükséges feltétel a szélsőérték létezésére. Be kell látni, hogy ez valóban egy minimumhely.