Kardos – Montághverseny 2017/2018.

Beszámoló

A verseny internetes fordulójában 22 tesztfeladatot tűztünk ki az előre meghirdetett témakörökből (diofantoszi egyenletek és kombinatorikus geometria).

Kiemelkedő **Böcskei Bálint11.b** dolgozata (maximális 22 pont),

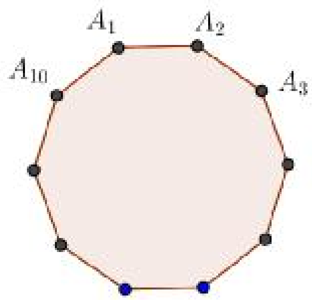
további jól sikerült munkák:
20 pont: **Bükki Dániel11.d**, **Farkas Ádám12.d**
19 pont: **Faucher-Tímár Bonifác11.d**, **Máth Benedek11.b**, **Szilveszter Máté11.d**.

Gratulálunk a szép eredményt elért versenyzőknek!

Legnehezebbnek a 15., 3., 16., 9., 11., 17., 10. feladatok bizonyultak, ezek megoldását alább közöljük.

Megoldások

15. feladat: Hány nem egybevágó háromszöget határoznak meg egy szabályos tízszög csúcsai?



Megoldás: Az A_1, A_2, … , A_{10} csúcsok közül a kiválasztottakra az indexükkel hivatkozunk. A lehetséges háromszög-típusok: (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 3, 7), (1, 4, 7). Eredmény: 8.

Egy **másik lehetséges gondolatmenet** az oldalak „hossza” szerinti összeszámolás (a „hosszt” úgy értjük, ahány darab tizeddkörív tartozik az oldalhoz): (1, 1, 8), (1, 2, 7),(1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4).

Egy **bonyolultabb módszer**: Ha számít az összeadandók sorrendje, akkor a pozitív egész számok halmazán megoldandó $a + b + c = 10$ egyenlet megoldásainak a számát ismétléses kombinációval is meghatározhatjuk: $\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}=\binom{3+7-1}{7}=\binom{9}{2}$ = 36. (Mivel mindegyik tag legalább 1, ezért a maradék 10 – 3 = 7 értéket kell „szétosztanunk” 3-felé úgy, hogy a szétosztás sorrendje nem számít.) A 36 esetben az (a, b, c) = (1, 1, 8), (2, 2, 6), (3, 3, 4), (4, 4, 2) számhármasokat 3-szor, a többit 3! = 6-szor számoltuk. A lényegesen különböző számhármasok száma $\frac{36-4\cdot 3}{6}+4$ = 8.

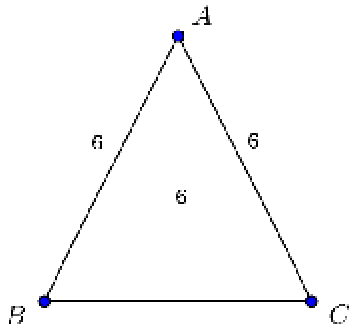
3. feladat: Hány olyan, pozitív egészekből álló (x, y) rendezett számpár van, amelyre $\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, ahol p egy rögzített, 2-nél nagyobb prímszám?

Megoldás: $\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \Leftrightarrow 2xy = py + px \Leftrightarrow (2x-p)(2y-p) = p^2$. A lehetőségek:

$2x-p$	1	p	p^2	-1	$-p$	$-p^2$
$2y-p$	p^2	p	1	$-p^2$	$-p$	-1
x	$\frac{p+1}{2}$	p	$\frac{p^2+p}{2}$	$\frac{p-1}{2}$	0	$\frac{p-p^2}{2}$
y	$\frac{p^2+p}{2}$	p	$\frac{p+1}{2}$	$\frac{p-p^2}{2}$	0	$\frac{p-1}{2}$

Az első három megoldás a megfelelő. Mivel $p \geq 3$ páratlan prímszám, mindegyik eredmény pozitív egész és egymástól különböző.

16. feladat: Az ABC háromszög AB és AC oldalain, valamint a háromszög belsejében rendre felvettünk 6-6 pontot. Legfeljebb hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai az adott 18 pont közül kerülnek ki? (Az A, B, C csúcsokban nincs felvett pont.)



Megoldás: A legtöbb háromszöget akkor kapjuk, ha az AB és AC oldalakon levőkön kívül semelyik három pont nincs egy egyenesben. Az összeszámolást végezhetjük pl. az alapján, hogy a háromszögeknek hány csúcsa van az AB oldalon.

I. Ha 2 ilyen csúcs van az AB oldalon, akkor ezeket $\binom{6}{2}$-féleképpen választhatjuk ki, és hozzájuk 12 további csúcs párosítható. Ez $\binom{6}{2}\cdot 12$ eset.

II. 1 csúcs esetén: a további 2 csúcsot a maradék 12 pont közül választhatjuk ki, ez $6\cdot\binom{12}{2}$ lehetőség.

III. Ha 0 csúcs van az AB szakaszon, akkor a háromszög belsejében és az AC oldalon lévő pontok közül választhatunk rendre 3 + 0-t, 2 + 1-et, 1 + 2-t. A lehetőségek száma az egyes esetekben $\binom{6}{3}+\binom{6}{2}\cdot 6+\binom{6}{1}\cdot\binom{6}{2}$.

Összesen tehát $\binom{6}{2}\cdot 12 + 6\cdot\binom{12}{2} + \binom{6}{3}+\binom{6}{2}\cdot 6+\binom{6}{1}\cdot\binom{6}{2}$ = 776 lehetőség van.

Másképpen: Könnyebb az összeszámolás az alapján, hogy a háromszögeknek hány csúcsa van az *ABC* háromszög belsejében. 3, 2, 1 ill. 0 pont esetén a lehetőségek száma $\binom{6}{3}+\binom{6}{2}\cdot 12+6\cdot\binom{12}{2}+2\cdot 6\cdot\binom{6}{2}$ = 776.

Komplementer összeszámolás: Az összes kiválasztható ponthármas száma $\binom{18}{3}$, ebből „rosszak” azok, amik az *AB* ill. *AC* oldalra esnek: $2\cdot\binom{6}{3}$. Eredmény: $\binom{18}{3}-2\cdot\binom{6}{3}$.

9. feladat: $x^2-8x+y^2+6y=75$. Hány megoldás van az (x, y) egész számpárok halmazán?

Megoldás: $(x-4)^2-16+(y+3)^2-9=75 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y+3)^2=100$. A 100 négyzetösszeg-felbontásai: 0^2+10^2, 6^2+8^2. Az alábbi táblázat alapján (x; y) lehetséges értékeire 12 db megoldást találunk.

$x-4$	0	±10	±6	±8
x	1-féle	2-féle	2-féle	2-féle
$y+3$	±10	0	±8	±6
y	2-féle	1-féle	2-féle	2-féle
	2	2	4	4

11. feladat: $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac+4$. Hány megoldás van, ha a, b, c pozitív egész számok?

Megoldás: $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac+4 \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=8$. A 8 négyzetösszeg előállítása: $0^2+2^2+2^2$. Tehát pl. $b=a$, $c=a-2$ megoldást ad, így végtelen sok megoldás van.

17. feladat: Egy szabályos hatszög összes oldalát és átlóját berajzoltuk. Nevezzünk az így kapott szakaszok közül kettőt "idegennek", ha nincs közös pontjuk (beleértve a végpontokat is). Hány "idegen" szakaszpár van?

Megoldás: Az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ hatszögben az A_1A_2 típusú szakaszhoz $\binom{4}{2}$, az A_1A_3 típusúhoz $\binom{3}{2}$, az A_1A_4 típusúhoz 2 db idegen szakasz található. Az egyes típusokból rendre 6, 6, 3 darab szakasz van, de a $6\cdot\binom{4}{2}+6\cdot\binom{3}{2}+3\cdot 2$ összegben minden szakaszpárt kétszer számoltunk. Eredmény: $\dfrac{6\cdot\binom{4}{2}+6\cdot\binom{3}{2}+3\cdot 2}{2}$ = 30.

10. feladat: $x^2-8xy+16y^2+16x+34y=1798$. Hány megoldás van, ha x, y pozitív egész számok?

Megoldás: Az x-re másodfokú egyenletben y-t paraméternek tekintjük.
$x^2+x(-8y+16)+16y^2+34y-1798=0$. A diszkrimináns nemnegatív:
$D=(-8y+16)^2-4(16y^2+34y-1798)$ = –256y + 256 – 136y + 7192 = –392y + 7448 = 392(19 – y) ≥ 0 ⇔ 1 ≤y≤ 19. Másrészt $x=\dfrac{8y-16\pm\sqrt{392(19-y)}}{2}=4y-8\pm 7\sqrt{2(19-y)}$ egész kell legyen, így 19 – y = 2k^2 alakú.19 – y lehetséges értékei 0, 2, 8, 18. 6 megoldás van:

19 – y	0	2	8	18
y	19	17	11	1
x	68	74, 46	64, 8	38, –46