

## Kardos-verseny 2014. február 18. 14<sup>30</sup> – 17<sup>30</sup>

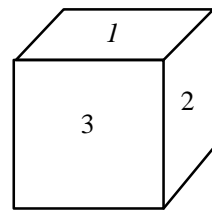
A versenyen számológép is használható.

Az első három feladat mindenkinek azonos, a továbbiak kitűzésekor jeleztük az évfolyamot. Például egy 10-dik osztályos feladatai: 1, 2, 3, 4, 7. (Évfolyamonként 5 feladat van.)

1. Az  $a_1, a_2, a_3, \dots$  sorozat rekurzív alakja  $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ , ha  $n \geq 2$ . Tudjuk még, hogy az első 40 elem szorzata 8 és az első 80 elem szorzata is 8. Adjuk meg a sorozat első és második elemét!

2. Az  $(a)$  sorozatra  $a_{n+2} = a_{n+1} + 12a_n$ , ha  $n \in \mathbf{N}$ ; és  $a_0 = 2, a_1 = 3$ . Adjunk képletet  $a_{2014}$  kiszámítására!

3. Az asztalon fekszik az ábrán látható szabályos dobókocka. A kockát minden lépésben eggyel oldalra billentik, a négy irány közül véletlenszerűen választva egyet. A játéknak akkor van vége, ha 2-es vagy 6-os kerül felülre; az első esetben Anna, a másodikban Béla győz.



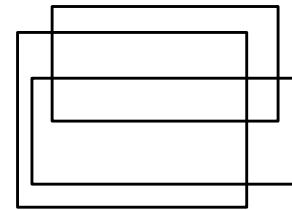
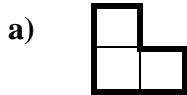
a) Mekkora valószínűséggel nyer Anna, illetve Béla?

b) Átlagosan hány billentésig tart ez a játék?

(A szabályos dobókockán a szemközti lapokon lévő számok összege 7.)

4. (10) Egy  $3 \times 10$ -es táblázatot hézagmentesen és átfedés nélkül lefedünk

a) 3 egységnégyzetből álló L alakzattal; b)  $1 \times 3$ -as téglalappal. Hányféleképpen történhet a fedés? (Két különböző feladatról van szó; az alakzatok elforgathatók.)



5. (11) Legfeljebb hány részre osztja  $n$  darab párhuzamos állású téglalap a síkot? (A mintaábrán 3 téglalap 8 síkrészt állít elő.)

6. (12) Egy család év elején 5 millió Ft hosszúlejáratú kölcsönt vett fel, évi 5%-os kamatos kamatra. Minden év végén fix összegű törlesztőrészlettel csökkentik a tartozásukat. Mekkora legyen a törlesztőrészlet, ha pontosan 20 év múlva fizetik vissza a kölcsönt?

7. (10, 11) Egy szabályos nyolcszög alakú pálya két szemközti csúcsában van A és B.

a) Percenként mindketten véletlenszerűen valamelyik szomszédos csúcsba lépnek. Átlagosan mennyi idő múlva találkoznak?

b) Most csak A mozog, hasonlóan percenként lépve, de most a nyolcszög oldalai mellett az átlóit is használhatja; egy-egy lépésben tehát hét irány közül választhat véletlenszerűen. Átlagosan mennyi idő múlva találkozik A és B?

8. (12) A, B és C ebben a sorrendben felváltva feldob egy dobókockát. A nyer, ha 1-est dob, és ekkor vége a játéknak. Ha mást dobott, akkor B következik. Ő akkor nyer, ha 2-es vagy 3-as a dobása, és ekkor vége a játéknak; egyéb esetben C következik. C a 4, 5, 6 dobásokkal nyerhet; ha mást dobott, ismét A következik és így tovább. Milyen valószínűséggel nyeri a játékot A, B és C?