Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
2018-2019
6. osztály
Döntő - MEGOLDÁSOK

1. *Nagyi sütött egy tepsi zserbót, majd felszeletelte. A szeletek felét apa félretette, a maradék harmadát anya dugta el. Pisti az így maradt rész 3/4-ét felhabzsolta. Így Zsuzsinak 4 szelet jutott. Összesen hány szeletet dugott el másnapra a két szülő?*

Megoldás:

1. mo: Visszafelé okoskodva Pisti után ¼ résznyi maradt 4 szeletként, tehát Pisti 16 szeletből evett meg 12-t. Anya harmadrésznyit rejtett el, és 16 maradt meg, ami 2/3 résznyi, tehát anya 24 sütire bukkant rá, ami az összes süti fele, így éppen 48 szelet volt eredetileg a tepsiben. Ebből apa 24-et, anya 8-at rejtett el, összesen tehát 32 db-ot.

2. mo. Apa után maradt a szeletek fele, Anya után a felének a 2/3 része: $\frac{1}{2} * \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ rész. Ennek ¾-ét habzsolta fel Pisti, megmaradt hát az ¼-e, ami az összes süti $\frac{1}{3} * \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ része, 4 szeletben testet öltve. Az összes süti tehát $4 * 12 = 48$ szelet volt.
Ebből apa 24-et, anya 8-at rejtett el, összesen tehát 32 db-ot.

2. *A $\frac{2019}{7}$ tört tizedestört alakjában mennyi a vesszőt követő első 2018 számjegy összege?*

Megoldás:

A $\frac{2019}{7} = 288,\dot{4}2857\dot{1}$ számban 6 jegyű szakasz ismétlődik. $2018 = 336 * 6 + 2$, tehát 336 szakasz ismétlődik, és még az első két elem. Egy szakasz összege $4 + 2 + 8 + 5 + 7 + 1 = 27$, tehát a kérdezett összeg:

$$336 * 27 + 4 + 2 = 9078$$

3. *Az iskolai pingpongversenyen a döntőbe 5-en jutottak, a döntőben mindenki mindenkivel egyszer játszott. Győzelemért 3 pontot, döntetlenért 1 pontot, vereségért 0 pontot kaptak a versenyzők.*
   A pontverseny eredménye ez lett:
   - *Andris 12 pont*
   - *Bori 9 pont*
   - *Csilla 4 pont*
   - *Dénes 3 pont*
   - *Ernő 1 pont.*

   a) *Hány mérkőzés végződött döntetlennel?*
   b) *Csilla és Ernő mérkőzésének mi lett az eredménye*

Megoldás:

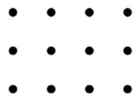
a) Összesen $\frac{5*4}{2} = 10$ mérkőzést játszottak le. Egy döntetlenért ketten kaptak 1-1 pontot – ez tehát 2 kiosztott pontot jelent, míg ha egyikük győzött, akkor 3 pontot osztottak ki, mindet a győztesnek. Ha minden mérkőzés győzelemmel zárult volna, akkor 30 pontot osztottak volna ki. Egy döntetlen esetén 1-gyel kevesebb pontot, azaz 29-et, és így tovább, ahány döntetlen volt, annyival kevesebb pontot osztottak ki. $12 + 9 + 4 + 3 + 1 = 29$, ezért 1 döntetlen volt.
b) Csilla 4 pontja keletkezhetett kétféleképp: $1 + 1 + 1 + 1$, vagy $3 + 1 + 0 + 0$. Az első esetet kizárhatjuk, mivel Andris pontszáma maximális, így ő nem játszott döntetlent, ekkor viszont

Csillának legalább 1 vesztes mérkőzése volt – Andrissal. Mivel azonban Csillának így is van 1 pontos eredménye, és csak egy döntetlen volt, ezért ezt csakis Ernővel érhette el, mert neki is van egy döntetlenje.
E : C = döntetlen.

A feltételek teljesíthetők is: Andris mindenkit legyőzött. Bori csak Andristól kapott ki, Csilla legyőzte Dénest, és döntetlent vívott ki Ernővel, Dénes Ernőt legyőzte, a többiektől kikapott, és Ernő 1 pontja a Csillával vívott döntetlenből született.
Ld a pontszámokat a táblázatban:

	A	B	C	D	E	össz
A		3	3	3	3	12
B	0		3	3	3	9
C	0	0		3	1	4
D	0	0	0		3	3
E	0	0	1	0		1

4. *Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, mely osztható a* $15, 18, 20, 24$ *számok mindegyikével, és négyzetszám. Ha viszont megszorozzuk* 15*-tel, akkor köbszámmá válik.*



Megoldás:
$2*2*2*3*3*5$ a négy szám legkisebb közös többese, de ez még nem négyzetszám. A négyzetszámok minden prímtényezőjének darabszáma páros, ezért szükség van még egy 2-es és egy 5-ös prímtényezőre.

$2*2*2*2*3*3*5*5$ ha most $15 = 3*5$-tel szorzunk, akkor köbszámmá lesz, tehát minden prímtényező darabszáma 3-mal osztható lesz. Mivel a 2-esek száma nem változik, de páros is kell maradjon, ezért 6 db 2-es kell, a 3-asok és 5-ösök száma 3-ra nő, ez tökéletes.
A keresett szám tehát a

$$2*2*2*2*2*2*3*3*5*5 = \ 14\,400$$

(Ez a szám a legkisebb ilyen. 2, 3, 5 prímek szükségesek az oszthatósági feltételek miatt. A 2-esek darabszáma páros és 3-mal osztható – a legkisebb ilyen darabszám a 6, a 3-asok, és 5-ösök darabszáma páros, és 3-mal osztva 2 a maradék, a legkisebb ilyen darabszám a 2.)

5. *Hány különböző tengelyesen szimmetrikus négyszög rajzolható erre a pontrácsra úgy, hogy minden csúcsot a rácspontok közül választunk? (Két négyszög különböző, ha legalább egy csúcsuk különbözik.)*

Megoldás:
Gyűjtsünk a megoldásokat a tengelyesen szimmetrikus négyszögek fajtái szerint csoportosítva.
Négyzetek (méretük szerint: 1×1, 2×2, átlós);
6+2+2=10 db.
Különböző oldalú *téglalapok* (1×2; 1×3; 2×3);
3+4= 7 db, illetve 2+1=3 db.
Konvex deltoidok (melyek nem négyzetek)
2 db.
Konkáv deltoidok előbb vízszintes, majd függőleges tengellyel;
4+2+2+4=12 db
húrtrapézok előbb 1, majd 2 egység magassággal.
2+2=4 db, és 1+1=2 db. Olyan *rombusz*, mely nem négyzet, nincs. Összegezve 40 db van.