Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
2016-2017
8.osztály
Döntő
Megoldások

1. *Öt darab különböző nagyságú barackunk van, és három darab különböző nagyságú almánk van. Két csomagot kell készíteni belőlük úgy, hogy mindkét csomagban négy-négy darab gyümölcs legyen, melyek legalább egyike alma. Hányféleképpen tehetjük ezt meg? (Két csomagolás akkor különböző, ha nem ugyanúgy osztottuk szét a különböző fajtájú és méretű gyümölcsöket.)*

Megoldás:

Mivel mindkét csomagba kell almát tennünk, ezért az egyik csomagban egy alma, a másikban kettő lesz. Ezt háromféleképpen állíthatjuk elő, aszerint, hogy melyik alma marad egyedül. A két alma mellé még két barackot kell választanunk. Ezt a rendelkezésre álló öt darabból összesen 10-féleképpen tehetjük meg. Mivel az almák szétosztásától függetlenül végezhetjük el a barackok szétosztását, ezért összesen $3 \cdot 10 = 30$-féle csomagpárt készíthetünk.

2. *Peti vásárolt egy körzőt, egy vonalzót és egy szögmérőt. Ha a körző az ötödébe, a vonalzó a felébe és a szögmérő a kétötödébe kerülne, akkor 400 Ft-ot, ha pedig a körző a felébe, a vonalzó a negyedébe és a szögmérő a harmadába kerülne, akkor 600 Ft-ot fizetett volna. Hány forintba került Peti vásárlása?*

Megoldás:

$$\frac{k}{5} + \frac{v}{2} + \frac{2sz}{5} = 400 \qquad \text{és} \qquad \frac{k}{2} + \frac{v}{4} + \frac{sz}{3} = 600$$

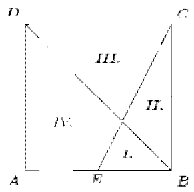
Ebből:

$$2k + 5v + 4sz = 4000 \qquad \text{és} \qquad 6k + 3v + 4sz = 7200$$

Azaz:

$$8k + 8v + 8sz = 11\,200 \qquad vagyis \quad k + v + sz = 1400$$

3. JelöljükE-vel az $ABCD$ négyzet AB oldalának felezőpontját! Határozd meg a rajzon $I., II., III., IV$-gyel jelzett sokszögek mindegyikéről, hogy területük mekkora része a négyzet területének!



Megoldás:

Az I. és II.-vel jelzett területek összege a négyzet negyede.

Megmutatjuk, hogy a II. rész területének fele az I. rész!

Legyen a DB és CE metszéspontja M. Tükrözzük a DB átlóra az ME-t. Ekkor E képe BC felezőpontja (E'), a BME háromszög képe $BE'M$. Az BCM és $BE'M$ háromszögek M-ből bocsájtott magasságai megegyeznek, a magassághoz tartozó oldal 2-szer akkora a BCM háromszögben, így a területe is kétszer akkora, mint a $BE'M$ háromszögnek, és a vele egybevágó BME háromszögnek.

Tehát az I. rész területe a négyzet negyedének a harmada, azaz az $\frac{1}{12} - e$.

A II. rész területe a négyzet negyedének a kétharmada, azaz az$\frac{1}{6} - a$.

A III. rész a négyzet feléből a hatoda, azaz az $\frac{1}{3} - a$.

A IV. rész a négyzet feléből a tizenkettede, azaz az $\frac{5}{12} - e$.

4. *A* 11112222 *számot felbontottam két egymást követő egész szám szorzatára. Melyik két szomszédos egész szám szorzatára bonthattam fel?*

Megoldás:

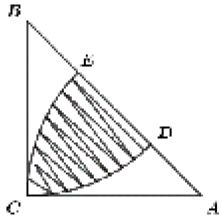
$11112222 = 1111 \cdot 10000 + 1111 \cdot 2$

Azaz: $11112222 = 1111 \cdot 10002$

$1111 \cdot 10002 = 1111 \cdot 3 \cdot 10002 : 3 = 3333 \cdot 3334$

Tehát a keresett egészek lehetnek a 3333 és a 3334, illetve a (-3334) és a (-3333).

5. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög szárainak hossza $AC = BC = 8\ cm$. Megrajzoltuk az A középpontú, C-n átmenő CE, és a B középpontú C-n átmenő CD köríveket. Mekkora a CDE alakzat területe?



Megoldás:

$T_{ABC} = T_{AEC} + T_{BCD} - T_{CDE}$, ebből$T_{CDE} = T_{AEC} + T_{BCD} - T_{ABC}$.

Mivel a körcikkek középponti szöge $45°$ és sugara $8\ cm$, ezért a területe nyolcada egy $8\ cm$ sugarú kör területének, azaz $T_{AEC} = T_{BCD} = \frac{8^2 \cdot \pi}{8} = 8\pi$ négyzetcentiméterben. A háromszög területe $T_{ABC} = \frac{8 \cdot 8}{2} \quad (cm^2)$.

Tehát
$T_{CDE} = T_{AEC} + T_{BCD} - T_{ABC} = 2 \cdot 8\pi - 32 = 16\pi - 32 \approx 18{,}24 \ \ (cm^2)$.$(\pi \approx 3{,}14)$