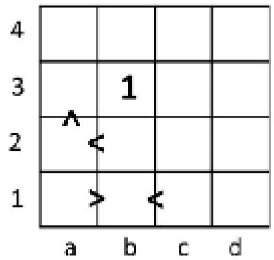
Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
2017-2018
5.osztály
Döntő - MEGOLDÁSOK

1. *Írd be a táblázat mezőibe az 1, 2, 3, 4 számokat úgy, minden sorban és minden oszlopban mind a négy szám pontosan egyszer szerepeljen, és a megadott relációk is teljesüljenek.*



Megoldás:
a2 nem lehet 4, mert mellette nála nagyobb szám áll. 1 sem lehet, mert felette kisebb szám áll. 2 sem, mert akkor *a3*=1 lenne, de a 3. sorban már van 1-es, ezért *a2*=3, és *a3*=2, és *b2*=4
b1-nél mindkét szomszédja nagyobb, ezért nem lehet 3, vagy 4, és 1 sem, mert a *b* oszlopban már van 1-es, tehát *b1*=2, így *a1*=4 (mert 3 már nem lehet) és ekkor *c1*=3 marad.
Innen a Sudoku szabályai szerint haladhatunk (többféle sorrendben): $d1 = 1 \to d2 \neq 1 \to c2 = 1 \to d2 = 2$ valamint $a4 = 1, b4 = 3$ és $c3 = 4$
Végül $c4 = 2, d4 = 4$ és $d3 = 3$

2	**1**		
3	*4*		

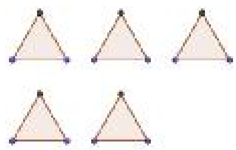
2	**1**		
3	*4*		
4	*2*	*3*	

2	**1**		
3	4	*1*	*2*
4	2	3	*1*

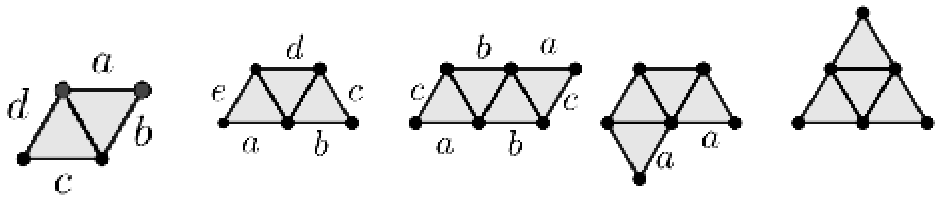
1	*3*		
2	**1**	*4*	
3	4	1	2
4	2	3	1

1	3	*2*	*4*
2	**1**	4	*3*
3	4	1	2
4	2	3	1

2. *Van 5 db egyforma szabályos háromszöglapunk műanyagból, mindkét oldalán egyformák. (Oldalaik és szögeik egyenlők.) Az oldalaik mentén lehet ezeket összeilleszteni csakis úgy, hogy a teljes él teljes élhez ragad. Keressük azokat a síkbeli alakzatokat, melyek mind az 5 háromszög összeépítésével készíthetők. (Tehát az összes olyan alakzatot, mely 5 db ilyen háromszögből áll.)*
Hány különböző ilyen alakzat van? (Különböző két alakzat, ha nem lehet őket egymásra helyezni úgy, hogy tökéletesen fedjék egymást.) Rajzold le ezeket, és indokold, miért nincs több!



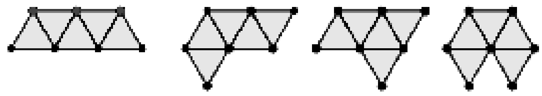
Megoldás:



1. ábra 2. ábra 3. ábra 4. ábra 5. ábra

2 háromszöget egymáshoz illesztve csak az 1. ábrán látható (rombusz) alakzatot kaphatjuk. Ennek *a, b, c, d* éleinek bármelyikéhez a 3. háromszöget illesztve csak a 2. ábrán látható (húrtrapéz) figura jöhet létre. Most a 2. ábrát vizsgálva ennek *a*, vagy *b* oldalához illesztve a negyedik elemet a 4. ábrát kapjuk; az *e* vagy *c* oldalán a 3. ábrához jutunk, a *d* oldalon pedig az 5. ábra keletkezik.

Haladjunk tovább a 3. ábra építésével. Már csak egy elemet kell hozzátenni. Az azonos betűvel jelölt éleken ugyanazon elemeket nyerjük (forgatással egymásra helyezhetők), tehát itt 3 megoldáshoz jutunk, míg a 4. ábra egyik a jelű élén haladva egy újabb, a 4. megoldáshoz jutunk.



A 4. ábra nem betűzött éleihez ragasztással olyan elemeket kapunk, melyeknek van a 3. ábrával egybevágó része, ezeket tehát már megtaláltuk, az 5. ábrához pedig bárhol újabb háromszöget illesztve szintén a 3. ábrával azonos részt tartalmazó figurát kapunk, így több megoldás nincs.

megjegyzés: természetesen más gondolatmenettel is kereshetünk. (pl a „szalagot” alkotó háromszögek száma szerint.)

3. *Tetszőleges, de egymást követő páratlan számot választottunk, 4 darabot. Összeszoroztuk ezeket. Milyen számjegyre végződhet a szorzat, és milyenre nem?*

Megoldás:
A szorzat utolsó számjegye a tényezők utolsó számjegyei szorzatának utolsó jegye. Tehát elég a végződésekkel foglalkozni.
A páratlan számok végződése periodikusan ismétlődik: 1, 3, 5, 7, 9, 1, 3, 5, 7, 9,….. Ezek közül 4 (szomszédosat) választva 2 különböző eset van:
a) Van közte 5-végű. Ekkor a szorzat 5-re végződik, mert páratlan számokat szoroztunk 5-tel osztható számmal.
b) Nincs közte 5-végű. Ekkor 7*9*1*3 adja a szorzat végét. Ez 9-re végződik, így a szorzatunk is 9-végű.

A szorzat tehát 5-re, vagy 9-re végződhet, másra nem.

4. *Hány olyan évszám van ebben az évezredben, melyben az első 2 számjegy szorzata megegyezik az utolsó két számjegy szorzatával? (Az évezred 2000-2999-ig tart) Pl. 2241 ilyen, mert* $2 * 2 = 4 * 1$

Megoldás:
Az első 2 számjegy szerint vegyük sorra az eseteket! (20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29) Ha egy szorzat két különböző számjegyből áll, akkor e számjegyek megcserélhetők (az utolsó két helyiértéken), míg az egyenlő jegyek nem cserélhetők. Eszerint számoljuk össze a megoldásokat.

első két jegy	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
szorzat	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
második két jegy	legalább az egyik 0	1, 2	1, 4 vagy 2, 2	1, 6 2, 3	1, 8 2, 4	2, 5	2, 6 3, 4	2, 7	2, 8 4, 4	2, 9 3, 6
esetek száma	10+9=19	2	2+1=3	2+2=4	2+2=4	2	2+2=4	2	2+1=3	2+2=4

Összesen tehát $19 + 2 + 3 + 4 + 4 + 2 + 4 + 2 + 3 + 4 = 47$ ilyen évszám van ebben az évezredben

5. *Egységkockákból építettünk egy nagyobb kockát, melynek éle 5 db egységkockából áll. Sajnos nem volt elég kiskockánk, épp annyi hiányzott, hogy a nagykocka minden csúcsából elhagyva egy kiskockát sikerült az építmény. (Nagykockánknak tehát épp a sarokkockái hiányoznak.) Az így kapott testet piros festékbe mártottuk, majd száradás után ismét szétszedtük kiskockáira. Hány olyan kiskockánk van, melyen a festett lapok száma*
a) 4; b) 3; c) 2; d) 1; e) 0?

Megoldás:

a) 4 lapja egy kiskockának sincs befestve, mert az eredeti testen nincs olyan kiskocka, melynek 4 lapja van szabadon. Számuk tehát **0 db.**

b) 3 lapja festett az eredeti test sarokkockáinak. Ilyenek az elképzelt 5x5x5-ös kocka csúcsainál keletkeznek 3-3 db, számuk tehát 8x3=**24 db.**

c) 2 lapja festett az eredeti test élkockáinak. (melyek élek belső kockái.) Ilyenek az elképzelt 5x5x5-ös kocka élein keletkeznek, de 5 helyett csak 1-1 db. (a csúcsok hiányoznak, a mellettük lévők sarokkockák, így 5-2-2=1 marad) Tehát számuk 12x1=**12 db.**

d) 1 lapja festett az eredeti test lapkockáinak, azaz azoknak, melyek a lapok belsejében keletkeznek. Ezek laponként egy-egy 3x3-as négyzetet alkotnak, számuk tehát 6x9=**54 db**.

e) 0 lapja festett azoknak a kockáknak, melyek a nagykocka belsejében vannak, a külső réteg elhagyásával. Ezek egy 3x3x3-as kisebb kockát alkotnak, számuk tehát **27db**.

Ellenőrzés (nem szükséges): Eredetileg van 5x5x5-8=117 kiskockánk. 24+12+54+27=117.