Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
2015-2016
6.osztály
Döntő

Megoldások

1. *Peti gondolt néhány 20-nál kisebb pozitív egész számra. A következőket árulta el:*

   (1) 3 db 3-mal osztható van a számok között.
   (2) 4 db közülük kétjegyű.
   (3) Nincs köztük 6-tal osztható.
   (4) 3 db páratlan.

   Hány db számra gondolhatott Peti?

Megoldás: (1) és (3) miatt minden 3-mal osztható szám páratlan, ezek csak a 3, 9, 15 lehetnek (2) szerint még legalább 3 darab 2-jegyű kell, és (4) miatt csak ezek csak párosak lehetnek, miközben 3-mal sem oszthatók. Ilyen számok már csak a 10, 14, 16. Mivel legalább 3 darab kell, és több nincs is, ezért csak 6 számra gondolhatott Peti, méghozzá csakis ezekre: 3, 9, 10, 14, 15, 16. (Ellenőrzés.)

2. *Egy körhintán az ülések 6 különböző állatfigurát mintáznak. 3 testvérpár úgy szeretne felülni a hintára, hogy mindenkivel pontosan szemben üljön a testvére. (Ha két testvér között kifeszítünk egy kötelet, a körhinta átmérőjét kapjuk.)*
   Hány különböző ülésrend alakítható ki? (Két ülésrend különböző, ha legalább egy gyerek másik állatfigurára kerül.)

1. megoldás: Jelöljük a testvérpárok közül az egyiket *A, B, C* betűkkel. A 6 ülésből *A* szabadon választ, ekkor azonban testvére csakis 1 székre ülhet – a szemköztesre. Így *B*-nek 4 szabadon választható ülés maradt, míg testvére megint nem választhat csak 1-et. *C*-nek a maradék 2 ülőhely bármelyike jó, míg testvére ül az utolsó szabad helyre.
Így a lehetőségek száma: $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$.
2. megoldás: A 3 testvérpár 3 szemköztes ülést $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ féleképp választhat. Ezután még az *A* testvérek helyet cserélhetnek mind a 6 esetben ($\cdot 2$), majd *B* tesók is helyet cserélhetnek minden eddig számolt esetben ($\cdot 2$), végül *C* páros is helyet cserélhet minden eddigi esetben.
Így a lehetőségek száma: $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$.

3. *Egy ligetben 240 énekesmadár él, rigók és mások. A rigók számának 2/3-a annyi, mint a nem rigók számának 2/5-e.*
   Hány nem rigó az énekesmadarak közül?

Megoldás: A rigók számának harmada legyen az egység (e). (Ha a rigók számának 2/3-a egyenlő a nem rigók számának 2/5-ével, akkor a rigók számának harmada is egyenlő a nem rigók számának ötödével.)

Így a rigók száma 3e, a nem rigók száma 5e. Az énekes madarak száma 3e + 5e = 8e = 240.

Innen e = 30, a nem rigók száma tehát $5 \cdot 30 = 150$.

(Ell. :A rigók száma $3 \cdot 30 = 90$, és 150 + 90 = 240. A rigók számának 2/3-a 60, és a nem rigók számának 2/5-e is 60.)

4. *Összeadtuk a pozitív egészeket 1-től 240-ig. Mennyivel lenne kevesebb az eredmény, ha a 3-mal oszthatókat kihagytuk volna az összegből?*

Megoldás: Az eredmény a 3-mal oszthatók összegével kevesebb, ezt kell tehát kiszámolni.

Minden 3. szám osztható 3-mal, ezért 240:3 = 80 darab ilyen szám van.

3 + 6 + 9 + …. + 240 = 9720. (A kiszámítás részleteire számos jó módszer lehet.)

5. *Lehet-e egy tengelyesen tükrös négyszögnek*
   a) pontosan 3 egyenlő oldala;
   b) pontosan 3 egyenlő szöge;
   c) pontosan 3 egyenlő oldala és pontosan 3 egyenlő szöge?
   Válaszodat indokold!

Megoldás:

a) Igen, pl egy húrtrapéz két szára és az egyik alapja lehet egyenlő.

b) Igen, egy deltoidnak a szimmetriatengely két oldalán lévő szöge és egy a tengely által metszett szöge lehet egyenlő. (Pl 40°, 40°, 40°, 240°, vagy 110°, 110°, 110°, 30°)

c) Nem.

Tengelyes tükrözés esetén szakasz és a képe egyenlő hosszú, ezért, ha pontosan 3 oldal egyenlő, akkor az egyik önmaga tükörképe. Ennek az oldalnak felezőmerőlegese a tengely.

Szög és a képe is egyenlő, így, ha pontosan 3 egyenlő szög van, akkor az egyik önmaga tükörképe, ennek a szögnek szögfelezője a tengely.

A négyszög tehát húrtrapéz, amelynek ha van három egyenlő szöge, akkor van négy egyenlő szöge is (tehát négyzet).