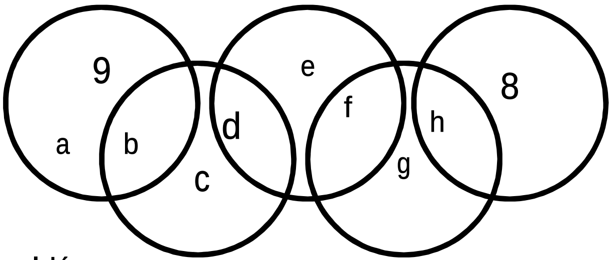
Budapesti Általános Iskolások Matematika Versenye
2014-2015
6.osztály
Döntő
Megoldások

1. *Az olimpiai karikák 9 mezőjébe írjuk be az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyeket úgy, hogy minden karikában a beírt számok összege 11 legyen!*



Megoldás:

A két szélső körben a 11 két különböző szám összegére bomlik, a középső három körben pedig 3 különböző szám összegére. Ezek az összegek lehetnek:

1+2+8=1+3+7=1+4+6=2+3+6=2+4+5

2+9=3+8=4+7=5+6

A 9-es egyetlen 2-tagú összegben szerepel, ezért csak szélső mezőbe kerülhet (szimmetria miatt mindegy melyikbe), így a=8 és b=2.

Mivel a 2 a második körbe került, nem lehet sem a harmadik, sem a negyedik körben, így e két körbe az 1;3;7 és az 1,4;6 számhármasok kerülhetnek csak. Így azonban a harmadik és negyedik körben minden lehetőség szerint kell 1-esnek lennie, ezért f=1.

A második körbe már csak a 2,3;6 vagy a 2;4;5 számhármas kerülhet, ezért a 8-as számára egyetlen hely maradt, a másik szélső mező.

Innen h=3 és g=7 következik.

A harmadik körbe már csak az 1;4;6, a második körbe a 2;4;5 számhármas jut, ennek megfelelően a közös részbe kerül a 4, d=4, s a befejezés csakis így lehetséges: c=5; e=6

A megoldás a mezőkön balról jobbra haladva: 9,2,5,4,6,1,7,3,8.

2. *Favágóék családjában előfordul, hogy nem az igazság hangzik el. Egy alkalommal valaki megkérdezte tőlük, hány fős a család. A következő válaszok érkeztek:*
Pisti: páros szám
Marika: prímszám
Zoli: páratlan szám
Apuka: két egynél nagyobb egész szám szorzata
Hányan mondtak igazat?

Megoldás: az első és a harmadik közül pontosan az egyik igaz.

A második és negyedik közül szintén. Ezért ketten mondtak igazat, de nem tudni, kik.

3. *Egy 11 cm oldalhosszúságú négyzet sarkában elhelyeztünk egy-egy kisebb négyzetet körüljárás szerint 1, 2, 3 és 4 cm oldalúakat. (Oldal egyeneseik közül kettő illeszkedik a nagy négyzet oldalára.) A nagy négyzet belsejébe eső csúcsok egy négyszöget határoznak meg. Mekkora ennek a négyszögnek a területe?*

Megoldás: 35 cm^2

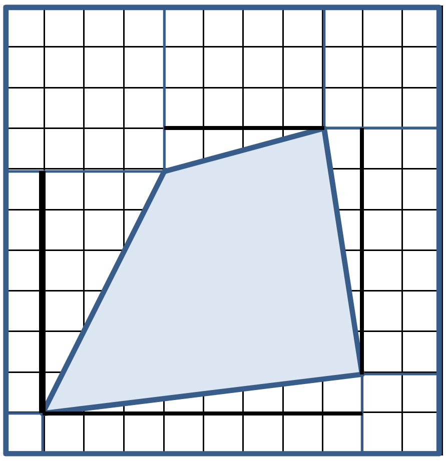
Feldaraboljuk a nagy négyzetet az ábrán látható módon négyzetekre, téglalapokra és derékszögű háromszögekre. A belső négyszög területét úgy kapjuk, hogy a nagy négyzet területéből levonjuk a négyzetek, téglalapok, és derékszögű háromszögek területének összegét.

11x11=121

A levonandó területek összege a bal alsó csúcstól pozitív forgásirányban haladva:

1+8+4+4+12+3+9+12+2+16+6+9=86

121-86=35 cm^2



4. *Keresd meg az összes olyan természetes számot, melyre igaz, hogy 16-tal osztható, számjegyeinek szorzata 6, és számjegyeinek összege 7.*

Megoldás: A számjegyek szorzata 6 lehet úgy, hogy 1db 6-os, és néhány 1-es, vagy egy db 2-es, egy db 3-as, és néhány 1-es szerepel. A jegyek összege emellett 7, így a számjegyek az első esetben lehetnek 1 és 6, amiből a 61, és a 16 állítható elő. Ezek közül csak a 16 osztható 16-tal.

Második esetben a számjegyek 2, 3, 1, 1, amiből páros számokat kell előállítani: 1132, 1312, 3112. 16-tal ezek közül is csak a 1312 osztható 16-tal.

A keresett számok tehát a 16 és az 1312.Tehát a 2015 alatt a 2198 található.

5. *Egy társaságban 5 ember találkozott. Megkérdeztük őket, kinek hány ismerőse van ötük között. A válaszok:*
A: Négy embert ismerek.
B: Kevesebb ismerősöm van, mint A-nak.
C: Ugyanannyi ismerősöm van, mint D-nek.
D: Eggyel kevesebb ismerősöm van, mint E-nek.
E: Páratlan számú embert ismerek.
Ismerheti-e egymást C és D?

Megoldás: Mivel A-nak 4 ismerőse van, ő mindenkit ismer, így mindenkinek legalább egy ismerőse van. Ezért E-nek nem lehet 1 ismerőse, csakis 3, mert ha 1 lenne, akkor

D-nek 1-1=0 lenne.
Ebből viszont D és C ismerőseinek száma 2.
D és C ismerik A-t, ha tehát egymást ismernék, akkor ők már E-vel nem lehetnek ismerősök, így viszont E-nek csak A és B jut ismerősül, ami csak 2 ismeretséget jelent, tehát C és D nem ismerhetik egymást.

Ha C és D nem ismerik egymást, akkor a feltételek kielégíthetők (3 féleképpen is, nem várjuk el, hogy mindhármat megadja a tanuló, de ha nem ad megoldást, akkor ne kapjon teljes pontszámot. Ha mindhármat megadja, akkor kaphat érte többletpontot.)

I. lehetőség: A-B;A-C;A-D;A-E;C-E;D-E
II. lehetőség: A-B;A-C;A-D;A-E;B-E;B-C;D-E
III. lehetőség: A-B;A-C;A-D;A-E;B-E;B-D;C-E