

## Gráfokkal kapcsolatos feladatok 01.

1. Izomorf-e két gráf? Itt két példa lenne (most ide nem tudom betenni), az egyiknél kell adni egy jó megfeleltetést a két gráf csúcsai közt, a másiknál pedig meg kell mutatni, hogy nem lehetséges megfeleltetés a csúcsok közt.
2. Igazoljuk, hogy egy  $n$  csúcsú összefüggő gráf akkor és csak akkor fa, ha  $n-1$  éle van.
3. Igazoljuk, hogy ha egy fában van  $k$ -ad fokú pont, akkor legalább  $k$  db elsőfokú pont van benne. Igaz-e ez fordítva?
4. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka:
  - a) 3,3,3,2,2,2,1,1,1
  - b) 6,6,5,4,4,3,2,2,1
  - c) 7,7,7,6,6,6,5,5,5
  - d) 1,3,3,4,5,6,6
5. Bizonyítsuk be, hogy minden fában van legalább 2 db elsőfokú csúcs.
6. Hány pontja van egy  $n$  pontú,  $k$  komponensű, körmentes gráfnak?
- 7.\* Egy 10 pontú gráfban minden pont foka legalább 7. Bizonyítsuk be, hogy bármely három pontnak van közös szomszédja.
8. Legyen  $G$  gráf csúcsainak a halmaza  $\{1,2,\dots,100\}$ . Összefüggő-e  $G$ , ha az éleket a következőképpen adjuk meg:
  - a)  $i$  és  $j$  pontosan akkor van összekötve, ha  $i-j$  páratlan.
  - b)  $i$  és  $j$  pontosan akkor van összekötve, ha  $i-j$  3-mal osztható ( $i \neq j$ ).
  - c)  $i$  és  $j$  pontosan akkor van összekötve, ha  $|i-j|=3$  vagy  $|i-j|=8$ .
9. Legyen  $G$  egy  $2n$  csúcsú egyszerű gráf, amelyben minden pont foka legalább  $n$ . Mutassuk meg, hogy  $G$  összefüggő.
10. Le lehet-e rajzolni a következő gráfokat egy vonallal, a toll felemelése nélkül (Euler út)? Itt lenne 4 gráf, amelyeket megint nem tudok most itt beilleszteni.
11. Egy egyszerű gráf csúcsait az  $1,2,\dots,100$  számok jelölik. Az  $i$  és  $j$  csúcsok pontosan akkor vannak összekötve, ha  $|i-j| < 3$ . Tartalmaz-e  $G$  Euler-kört, illetve \*Euler-utat?
12. Mutassunk olyan egyszerű gráfot, amely tartalmaz Euler-kört, páros sok pontja és páratlan sok éle van!
13. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább  $k$ , akkor van benne legalább  $k+1$  pontú kör.
- 14.\* Egy társaságban mindenki 4 másik embert ismer (kölsönös az ismeretség). Bizonyítsuk be, hogy leültethetők néhány körasztal köré úgy, hogy mindenki ismerje mindkét szomszédját.

## Gráfokkal kapcsolatos feladatok 02.

15. Tartalmaz-e a 11-es feladatban szereplő  $G$  gráf Hamilton-utat, illetve Hamilton-kört?
- 16.\* Egy teljes gráfban minden élet megirányítottunk. Mutassuk meg, hogy a kapott gráfban mindig van Hamilton-út.
17. Hány  $k$  élű egyszerű irányított gráf adható meg  $n$  címkézett ponton?
18. Egy 9 tagú társaságban mindenki átad öt általa kiválasztott ismerősének 100-100 forintot. Bizonyítsuk be, hogy az ajándékozások után van két olyan ember, akinek ugyanannyi forinttal változott a pénze.
19. Mutassuk meg, hogy egy hurokmentes irányított graf élhalmaza felbontható két diszjunkt részhalmazra úgy, hogy egyik sem tartalmaz irányított kört!
20. Legfeljebb hány pontja lehet annak a 19 élű gráfnak, amelyben minden pont fokszama legalább 3?
21. Lehet-e páratlan pontú páros gráfban Euler-kör, illetve Hamilton-kör?