FPI tehetséggondozó szakkör 11. évf. I. foglalkozás, 2012. szeptember 18.

I.1. Bejárható-e egy 5×5-ös sakktábla lóval,
a) ha nem kell ugyanott befejeznünk, ahonnan indultunk?
b) ha ugyanott kell befejeznünk, ahonnan indultunk?
Mindkét esetben minden mezőre pontosan egyszer kell lépnünk (kivéve a b) feladatrészben az egymással megegyező kezdő és befejező mezőt).

I.2. *OKTV 1996/97. II. kat. 1. ford. 2. fel.*
Egy sorozatban $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, ha $n > 1$. Állítsuk el a_n-et n függvényeként!

I.3. *OKTV 1996/97. II. kat. 1. ford. 1. fel.*
Az a és b pozitív számok összege 1. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} < \frac{1}{2}.$$

I.4. *OKTV 1996/97. II. kat. 1. ford. 4. fel.*
Egy 7 egység oldalú négyzetben elhelyezünk 51 pontot. Bizonyítsuk be, hogy ezek között a pontok között van 3 olyan, amely lefedhet egy egységsugarú körrel.

I.5. Bergengócia bármely két városa között van busz- vagy repülgépjárat. Igaz-e Bergengóciában, hogy vagy busszal vagy repülvel bármelyik városból bármelyik másikba el lehet jutni (átszállással, ha szükséges)?

I.6. Határozzuk meg az $x_1^4 + x_2^4$ kifejezés minimális értékét, ha x_1 és x_2 a

$$x^2 + px - \frac{1}{p^2}, \qquad p \in \mathbb{R}, p \neq 0,$$

polinom gyökei!

I.7. (OKTV, 2005-2006. III. kat. 1. forduló, 1. feladat)
Igaz-e, hogy a $7k+3$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ számtani sorozatban végtelen sok palindrom szám van? (Azokat a számokat nevezzük palindrom számoknak, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában a jegyeket fordított sorrendben felírva ugyanahhoz a számhoz jutunk, pl. 12321.)

I.8. Keressünk pitagoraszi számhármasokat!

FPI tehetséggondozó szakkör 11. évf. II. foglalkozás, 2012. szeptember 25.

Megmaradt példák:

I.5. Bergengócia bármely két városa között van busz- vagy repülgépjárat. Igaz-e Bergengóciában, hogy vagy busszal vagy repülvel bármelyik városból bármelyik másikba el lehet jutni (átszállással, ha szükséges)?

I.6. Határozzuk meg az $x_1^4 + x_2^4$ kifejezés minimális értékét, ha x_1 és x_2 a

$$x^2 + px - \frac{1}{p^2}, \qquad p \in \mathbb{R}, p \neq 0,$$

polinom gyökei!

I.7. (OKTV, 2005-2006. III. kat. 1. forduló, 1. feladat)
Igaz-e, hogy a $7k+3$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ számtani sorozatban végtelen sok palindrom szám van? (Azokat a számokat nevezzük palindrom számoknak, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában a jegyeket fordított sorrendben felírva ugyanahhoz a számhoz jutunk, pl. 12321.)

I.8. Keressünk pitagoraszi számhármasokat!

Új feladatok:

II.1. (OKTV, 1996-1997. I. kat. 1. forduló, 1. feladat)
Oldja meg a valós számok halmazán az

$$x + \sqrt[8]{x^5} - 12\sqrt[4]{x} = 0$$

egyenletet!

II.2. (OKTV, 199-1998. II. kat. 1. forduló, 1. feladat)
Egy tízes számrendszerben felírt pozitív egész szám számjegyeit fordított sorrendben is felírjuk, és az így kapott számot hozzáadjuk az eredetihez.
a) Kaphatunk-e így csupa 9-esbl álló 1997 jegy számot?
b) Kaphatunk-e így csupa 9-esbl álló 1998 jegy számot?

II.3. (OKTV, 199-1998. II. kat. 1. forduló, 2. feladat)
Egy derékszög háromszög befogóira mint átmérkre kifelé félköröket szerkesztünk. Bizonyítsuk be, hogy annak a négyzetnek a területe, amelynek oldala a két félkör közös érintszakasza, a derékszög háromszög területével egyenl. (A közös érintszakasz: a két félkör közös érintjén az érintési pontokat összeköt szakasz.)

II.4. (OKTV, 199-1998. II. kat. 1. forduló, 3. feladat)
Bizonyítsuk be, hogy ha p 3-nál nagyobb prímszám, akkor bármely p darab egymást követ egész szám négyzetének az összege osztható p-vel.

II.5. (OKTV, 199-1998. II. kat. 1. forduló, 4. feladat)
32 település között telefonvonalakat építenek ki. Egy telefonvonal pontosan két települést köt össze, és két település között legfeljebb egy közvetlen vonal épül. Bizonyítsuk be, hogy ha már 466 vonalat kiépítettek, akkor bármely településrl bármely településre lehet telefonálni vagy közvetlen vonalon, vagy több, már kiépített vonal összekapcsolásával.

FPI tehetséggondozó szakkör 11. évf. III. foglalkozás, 2012. okt. 2.

Megmaradt példák:

I.8. Keressünk pitagoraszi számhármasokat!

II.1. (OKTV, 1996-1997. I. kat. 1. forduló, 1. feladat)
Oldja meg a valós számok halmazán az $x+\sqrt[8]{x^5}-12\sqrt[4]{x}=0$ egyenletet!

II.2. (OKTV, 199-1998. II. kat. 1. forduló, 1. feladat) Egy tízes számrendszerben felírt pozitív egész szám számjegyeit fordított sorrendben is felírjuk, és az így kapott számot hozzáadjuk az eredetihez.
a) Kaphatunk-e így csupa 9-esbl álló 1997 jegy számot?
b) Kaphatunk-e így csupa 9-esbl álló 1998 jegy számot?

II.3. (OKTV, 199-1998. II. kat. 1. forduló, 2. feladat) Egy derékszög háromszög befogóira mint átmérkre kifelé félköröket szerkesztünk. Bizonyítsuk be, hogy annak a négyzetnek a területe, amelynek oldala a két félkör közös érintszakasza, a derékszög háromszög területével egyenl. (A közös érintszakasz: a két félkör közös érintjén az érintési pontokat összeköt szakasz.)

II.4. (OKTV, 199-1998. II. kat. 1. forduló, 3. feladat) Bizonyítsuk be, hogy ha p 3-nál nagyobb prímszám, akkor bármely p darab egymást követ egész szám négyzetének az összege osztható p-vel.

II.5. (OKTV, 199-1998. II. kat. 1. forduló, 4. feladat)
32 település között telefonvonalakat építenek ki. Egy telefonvonal pontosan két települést köt össze, és két település között legfeljebb egy közvetlen vonal épül. Bizonyítsuk be, hogy ha már 466 vonalat kiépítettek, akkor bármely településrl bármely településre lehet telefonálni vagy közvetlen vonalon, vagy több, már kiépített vonal összekapcsolásával.

Új feladatok:

III.1. Bergengóciában egy fagyi ára 1 peták, míg a csoki és a túrórudi $2-2$ petákba kerül. Hánynféleképpen vásárolhatunk ebbl a három termékbl, ha 10 petákunk van, mind elköltjük és
a) nem számít **b)** számít a vásárlás sorrendje?

III.2. (OKTV, 1998-1999. II. kat. 1. forduló, 2. feladat) Az $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sorozatban $x_0=a$, $x_1=b$ adott pozitív számok, és a sorozat további tagjainak képzési szabálya:

$$x_{n+2}=\frac{x_{n+1}+1}{x_n} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Fejezzük ki x_{1998} értékét a és b segítségével!

III.3. (OKTV, 1998-1999. II. kat. 1. forduló, 3. feladat)
Határozzuk meg a derékszög koordinátarendszer síkjában azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekre igaz, hogy létezik olyan téglalap, amelynek a kerülete a pont els koordinátájával, területe pedig a pont második koordinátájával egyenl!

III.4. (OKTV, 1997-1998. II. kat. 2. forduló, 1. feladat)
Egy 3×3-as táblázat minden mezjére ráírunk egy egész számot úgy, hogy a beírt számok között legyen páros is és páratlan is. Ezután a táblázatból egy újabb (második) táblázatot készítünk a következ módon: az eredeti táblázat egy M mezjével szomszédos mezkre írt számokat összeadjuk, és ezt a számot írjuk az új táblázatba az M-nek megfelel helyre, és ezt mind a kilenc mezre elvégezzük. Kérdéseink: ennek az eljárásnak megismétlésével egy tetszleges táblázatból kiindulva eljuthatunk-e olyan táblázathoz, amelyben
a) minden mezn páratlan szám áll;
b) minden mezn páros szám áll?
(Két mez akkor szomszédos, ha van közös oldaluk.) Egy példa az új táblázat szerkesztésére:

3	-1	0
9	7	2
1	3	6

$\Rightarrow$

12	14	5
11	13	13
12	14	5

FPI tehetséggondozó szakkör 11. évf. IV. foglalkozás, 2012. okt. 9.

Megmaradt példák:

II.1. (OKTV, 1996-1997. I. kat. 1. forduló, 1. feladat)
Oldja meg a valós számok halmazán az $x + \sqrt[8]{x^5} - 12\sqrt[4]{x} = 0$ egyenletet!

II.2. (OKTV, 199-1998. II. kat. 1. forduló, 1. feladat) Egy tízes számrendszerben felírt pozitív egész szám számjegyeit fordított sorrendben is felírjuk, és az így kapott számot hozzáadjuk az eredetihez. Kaphatunk-e így csupa 9-esbl álló
a) 1997 jegy számot? **b)** 1998 jegy számot?

II.4. (OKTV, 199-1998. II. kat. 1. forduló, 3. feladat) Bizonyítsuk be, hogy ha p 3-nál nagyobb prímszám, akkor bármely p darab egymást követ egész szám négyzetének az összege osztható p-vel.

II.5. (OKTV, 199-1998. II. kat. 1. forduló, 4. feladat)
32 település között telefonvonalakat építenek ki. Egy telefonvonal pontosan két települést köt össze, és két település között legfeljebb egy közvetlen vonal épül. Bizonyítsuk be, hogy ha már 466 vonalat kiépítettek, akkor bármely településrl bármely településre lehet telefonálni vagy közvetlen vonalon, vagy több, már kiépített vonal összekapcsolásával.

III.1. Bergengóciában egy fagyi ára 1 peták, míg a csoki és a túrórudi $2-2$ petákba kerül. Háynféleképpen vásárolhatunk ebbl a három termékbl, ha 10 petákunk van, mind elköltjük és
a) nem számít **b)** számít a vásárlás sorrendje?

III.2. (OKTV, 1998-1999. II. kat. 1. forduló, 2. feladat) Az $x_0, x_1, x_2, ...$ sorozatban $x_0 = a$, $x_1 = b$ adott pozitív számok, és a sorozat további tagjainak képzési szabálya:

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}+1}{x_n} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Fejezzük ki x_{1998} értékét a és b segítségével!

III.3. (OKTV, 1998-1999. II. kat. 1. forduló, 3. feladat) Határozzuk meg a derékszög koordinátarendszer síkjában azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekre igaz, hogy létezik olyan téglalap, amelynek a kerülete a pont els koordinátájával, területe pedig a pont második koordinátájával egyenl!

III.4. (OKTV, 1997-1998. II. kat. 2. forduló, 1. feladat) Egy 3×3-as táblázat minden mezjére ráírunk egy egész számot úgy, hogy a beírt számok között legyen páros is és páratlan is. Ezután a táblázatból egy újabb (második) táblázatot készítünk a következ módon: az eredeti táblázat egy M mezjével szomszédos mezkre írt számokat összeadjuk, és ezt a számot írjuk az új táblázatba az M-nek megfelel helyre, és ezt mind a kilenc mezre elvégezzük. Kérdéseink: ennek az eljárásnak megismétlésével egy tetszleges táblázatból kiindulva eljuthatunk-e olyan táblázathoz, amelyben
a) minden mezn páratlan szám áll;
quad **b)** minden mezn páros szám áll?
(Két mez akkor szomszédos, ha van közös oldaluk.) Egy példa az új táblázat szerkesztésére:

3	-1	0
9	7	2
1	3	6

$\longrightarrow$

12	14	5
11	13	13
12	14	5

Új feladatok:

IV. 1. (OKTV, 1998-1999. II. kat. 1. forduló, 4. feladat) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következ egyenletet:

$$x + 2y + 3z = 2\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{2y-1} + \sqrt{3z-1}\right).$$

IV. 2. (OKTV, 1998-1999. II. kat. 1. forduló, 5. feladat) Az ABC derékszög háromszög hozzáírt köreinek (küls érint köreinek) a középpontjai A', B', C'. Bizonyítsuk be, hogy az $A'B'C'$ háromszög területe legalább $(\sqrt{8}+2)$-szerese az ABC háromszög területének!

IV. 3. (OKTV, 1999-2000. II. kat. 1. forduló, 4. feladat) Legyen P az $ABCD$ négyzet köré írt kisebbik AB ívének tetszleges pontja. Bizonyítsuk be, hogy a $\frac{PA+PB}{PC+PD}$ hányados értéke minden P pontra $(\sqrt{2}-1)$-gyel egyenl.

IV. 4. (OKTV, 1998-1999. II. kat. 2. forduló, 2. feladat) Egy derékszög háromszögbe kétféle módon is beírtunk egy négyzetet: az els esetben a négyzet két oldala egy-egy befogón van, egy csúcsa pedig az átfogón; a második esetben a négyzet oldala az átfogón van, egy-egy csúcsa pedig egy-egy befogón. Az els esetben a négyzet területe 441, a másodikban 440 területegység. Mekkora a befogók összege?

FPI tehetséggondozó szakkör 11. évf. VI. foglalkozás, 2012. nov. 6.

Megmaradt példák:

III.4. (OKTV, 1997-1998. II. kat. 2. forduló, 1. feladat) Egy 3×3-as táblázat minden mezjére ráírunk egy egész számot úgy, hogy a beírt számok között legyen páros is és páratlan is. Ezután a táblázatból egy újabb (második) táblázatot készítünk a következ módon: az eredeti táblázat egy M mezjével szomszédos mezkre írt számokat összeadjuk, és ezt a számot írjuk az új táblázatba az M-nek megfelel helyre, és ezt mind a kilenc mezre elvégezzük. Kérdéseink: ennek az eljárásnak megismétlésével egy tetszleges táblázatból kiindulva eljuthatunk-e olyan táblázathoz, amelyben

a) minden mezn páratlan szám áll;

quad **b)** minden mezn páros szám áll?

(Két mez akkor szomszédos, ha van közös oldaluk.) Egy példa az új táblázat szerkesztésére:

3	-1	0
9	7	2
1	3	6

$\longrightarrow$

12	14	5
11	13	13
12	14	5

IV. 2. (OKTV, 1998-1999. II. kat. 1. forduló, 5. feladat) Az ABC derékszög háromszög hozzáírt köreinek (küls érint köreinek) a középpontjai A', B', C'. Bizonyítsuk be, hogy az $A'B'C'$ háromszög területe legalább $(\sqrt{8}+2)$-szerese az ABC háromszög területének!

IV. 3. (OKTV, 1999-2000. II. kat. 1. forduló, 4. feladat) Legyen P az $ABCD$ négyzet köré írt kisebbik AB ívének tetszleges pontja. Bizonyítsuk be, hogy a $\frac{PA+PB}{PC+PD}$ hányados értéke minden P pontra $(\sqrt{2}-1)$-gyel egyenl.

IV. 4. (OKTV, 1998-1999. II. kat. 2. forduló, 2. feladat) Egy derékszög háromszögbe kétféle módon is beírtunk egy négyzetet: az els esetben a négyzet két oldala egy-egy befogón van, egy csúcsa pedig az átfogón; a második esetben a négyzet oldala az átfogón van, egy-egy csúcsa pedig egy-egy befogón. Az els esetben a négyzet területe 441, a másodikban 440 területegység. Mekkora a befogók összege?

ELADÁS Két hét múlva kedden (nov. 20-án) 16.00-tól.
Füredi Zoltán: Véges geometriák és négyszögmentes gráfok

Új feladatok

ELADÁS01 Jelöljük ki az $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz néhány részhalmazát úgy, hogy a halmaz bármelyik két elemét együtt pontosan egy kijelölt halmaz tartalmazza!

ELADÁS02 Készítsünk hasonló hármasrendszert 9 elemen!

VI. 1. Az ABC egyenl szárú derékszög háromszög AC átfogóján úgy vettük fel az M és K pontokat, hogy K az M és C közé essék és, hogy az $MBK\angle$ 45°-os legyen. Bizonyítsuk be, hogy $MK^2 = AM^2 + KC^2$!

VI. 2. Az $ABCD$ konvex négyszög olyan, hogy a DAC és DBC szögek szögfelezi a CD oldalon metszik egymást. Bizonyítsd be, hogy az ADB és az ACB szögek szögfelezinek metszéspontja az AB oldalra esik!

VI. 3. (OKTV, 1996-1997. II. kat. 2. forduló, 2. feladat)

A hegyesszög ABC háromszög köré írt kör A és B pontjaiban húzott érintk az S pontban metszik egymást. Az AB és CS egyenesek metszéspontját jelölje M. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC^2}{BC^2}.$$

VI. 4. Adottak a síkon az ABC, ACO szabályos háromszögek. Tekintsük azt az O középpontú kört, amely áthalad az A, C pontokon! Bizonyítsd be, hogy e kör bármely M pontjára $MA^2 + MC^2 = MB^2$!

IV. 2. megoldása A hozzáírt körök ρ_a, ρ_b, ρ_c sugara rendre $s-b$, $s-a$, s, így a BCA', ACB' ,ABC', ABC háromszögek területe rendre $\frac{a(s-b)}{2}$, $\frac{b(s-a)}{2}$, $\frac{cs}{2}$, $\frac{ab}{2}$, a bizonyítand összefüggés

$$\frac{a(s-b)+b(s-a)+cs+ab}{2} \geq (\sqrt{2}+1)ab$$

Hsználjuk az $c^2=a^2+b^2$ összefüggést és vegyük figyelembe, hogy a és b mértani közepe nem nagyobb a és b számtani és négyzetes közepénél.

IV. 3. I. megoldása

Legyen a rövidebbik AB ív felezpontja O. Másoljuk rá P-bl a PB egyenesre, de a B-vel ellenkez oldalra a $PA=PA'$ szakaszt és PS-re, de a D-vel ellenkez irányba a $PC=PC$" szakaszt. Számoljuk ki a $PA'A\angle$-t és mutassuk meg, hogy A' az O középpontú A-n és B-n átmen k_1 körön van. Számoljuk ki a $PC'C\angle$-t is és mutassuk meg, hogy C' az O középpontú C-n és D-n átmen k_2 körön van.

Mutassuk meg, hogy $BPD\angle = BOD\angle = 90°$. Igazoljuk, hogy az O centrumú derékszög forgatva nyújtás, amely B-t a D-be viszi egyúttal a k_1 kör BA' húrját a k_2 kör DC' hrjába képezi…

IV. 3. II. megoldása

Legyen $ACB\angle = \alpha$. Tekintsük négyzetünk körülírt köréne kátmérjét egységnyinek, mutassuk meg a szinusztételbl és a kerületi szögek tételébl, hogy ekkor $PA=\sin\alpha$, $PB=\sin(45°-\alpha)$, $PC=\cos\alpha$, $PD=\sin(45°+\alpha)$. Az addíciós tétellel bontsuk fel a $\sin(45°\pm\alpha)$ kifejezéseket és mutassuk meg, hogy a kapott tört értéke mindig $(\sqrt{2}-1)$.

IV. 4. megoldása Ha a derékszög háromszög befogói a és b, átfogója és az ahhoz tartozó magasság c és m, akkor az els módon beírt négyzet területe $\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2=441$, a második módon beírté $\left(\frac{mc}{m+c}\right)^2=440$. Az $mc=ab$ és c=a^2+b^2 összefüggések alkalmazásával a $k=(a+b)$, $t=ab$ segédváltozókkal az els egyenletbl $t=21k$, a msodikbl

$$t^2(k^2-2t)=440(k^2-t)^2,$$

amibl a pozitív $k=462$.

FPI tehetséggondozó szakkör 11. évf. VII. foglalkozás, 2012. nov. 13.

Megmaradt példák:

IV. 4. (OKTV, 1998-1999. II. kat. 2. forduló, 2. feladat) Egy derékszög háromszögbe kétféle módon is beírtunk egy négyzetet: az els esetben a négyzet két oldala egy-egy befogón van, egy csúcsa pedig az átfogón; a második esetben a négyzet oldala az átfogón van, egy-egy csúcsa pedig egy-egy befogón. Az els esetben a négyzet területe 441, a másodikban 440 területegység. Mekkora a befogók összege?

ELADÁS01 Jelöljük ki az $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz néhány részhalmazát úgy, hogy a halmaz bármelyik két elemét együtt pontosan egy kijelölt halmaz tartalmazza!

ELADÁS02 Készítsünk hasonló hármasrendszert 9 elemen!

VI. 1. Az ABC egyenl szárú derékszög háromszög AC átfogóján úgy vettük fel az M és K pontokat, hogy K az M és C közé essék és, hogy az $MBK\angle$ 45°-os legyen. Bizonyítsuk be, hogy $MK^2 = AM^2 + KC^2$!

VI. 2. Az $ABCD$ konvex négyszög olyan, hogy a DAC és DBC szögek szögfelezi a CD oldalon metszik egymást. Bizonyítsd be, hogy az ADB és az ACB szögek szögfelezinek metszéspontja az AB oldalra esik!

VI. 3. (OKTV, 1996-1997. II. kat. 2. forduló, 2. feladat)

A hegyesszög ABC háromszög köré írt kör A és B pontjaiban húzott érintk az S pontban metszik egymást. Az AB és CS egyenesek metszéspontját jelölje M. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC^2}{BC^2}.$$

VI. 4. Adottak a síkon az ABC, ACO szabályos háromszögek. Tekintsük azt az O középpontú kört, amely áthalad az A, C pontokon! Bizonyítsd be, hogy e kör bármely M pontjára $MA^2 + MC^2 = MB^2$!

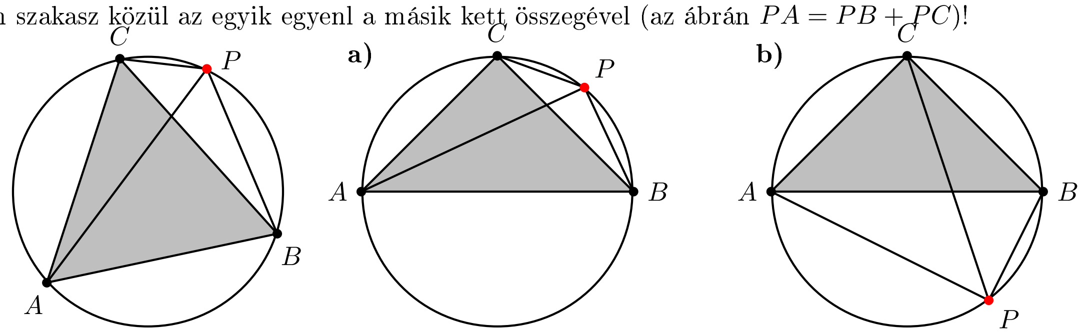
ELADÁS Jöv héten kedden (nov. 20-án) 16.00-tól.

Füredi Zoltán: Véges geometriák és négyszögmentes gráfok

FPI tehetséggondozó szakkör 11. évf. VIII. foglalkozás, 2012. nov. 27.

Megmaradt példák:

. **VI. 5.** Mutassuk meg, hogy a szabályos háromszög köré írt kör egy pontját a csúcsokkal összeköt három szakasz közül az egyik egyenl a másik kett összegével (az ábrán $PA = PB + PC$)!



VI. 6. Az ABC egyenl szárú derékszög háromszög ($AC = CB$, $AC \perp CB$) körülírt körének

a) rövidebbik $\widehat{BC}$ ívén

b) C-t nem tartalmazó $\widehat{AB}$ ívén

helyezkedik el a P pont (lásd a fenti két bal oldali ábrát). Milyen összefüggés írható fel a PA, PB, PC szakaszok hossza között?

Új feladatok

VIII.1. Melyek azok az a, b számjegyek amelyekre az $\overline{ab}$, $\overline{ba}$ kétjegy számok legnagyobb közös osztója $a^2 - b^2$?

VIII.2. Az a, b egész számokra

$$a = a^2 + b^2 - 8b - 2ab + 16$$

egyenlség teljesül. Igazoljuk, hogy a négyzetszám!

VIII.3. Legyenek x és y olyan pozitív egészek, amelyekre teljesül az

$$3x^2 + x = 4y^2 + y$$

egyenlet. Bizonyítsuk be, hogy $(x - y)$, $(3x + 3y + 1)$ és $(4x + 4y + 1)$ mind négyzetszámok!

VIII.4. Jelöljük a_n-nel a $\sqrt{n}$-hez legközelebbi egész számot. Számítsuk ki az

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_k}$$

összeget, ahol $k = 1999 \cdot 2000$.

VIII.5. Mely n egészekre lesz az

$$n^4 - 4n^3 + 14n^2 - 20n + 10$$

kifejezés értéke négyzetszám?

Emlékeztet

VI. 1. Az ABC egyenl szárú derékszög háromszög AC átfogóján úgy vettük fel az M és K pontokat, hogy K az M és C közé essék és, hogy az $MBK\angle$ 45°-os legyen. Bizonyítsuk be, hogy $MK^2 = AM^2 + KC^2$!

VI. 2. Az $ABCD$ konvex négyszög olyan, hogy a DAC és DBC szögek szögfelezi a CD oldalon metszik egymást. Bizonyítsd be, hogy az ADB és az ACB szögek szögfelezinek metszéspontja az AB oldalra esik!

VI. 3. (OKTV, 1996-1997. II. kat. 2. forduló, 2. feladat)

A hegyesszög ABC háromszög köré írt kör A és B pontjaiban húzott érintk az S pontban metszik egymást. Az AB és CS egyenesek metszéspontját jelölje M. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC^2}{BC^2}.$$

VI. 4. Adottak a síkon az ABC, ACO szabályos háromszögek. Tekintsük azt az O középpontú kört, amely áthalad az A, C pontokon! Bizonyítsd be, hogy e kör bármely M pontjára $MA^2 + MC^2 = MB^2$!

VIII.1. Melyek azok az a, b számjegyek amelyekre az $\overline{ab}$, $\overline{ba}$ kétjegy számok legnagyobb közös osztója $a^2 - b^2$?

Megoldás

$a^2 - b^2 \mid 10a + b$ és $a^2 - b^2 \mid 10b + a$, így

$a^2 - b^2 \mid 11(a + b)$ és $a^2 - b^2 \mid 9(a - b)$, tehát

$a - b \mid 11$ és $a + b \mid 9\ldots$

Megjegyzés Lehet folytatni kétjegy a, b számokkal.

VIII.2. Az a, b egész számokra

$$a = a^2 + b^2 - 8b - 2ab + 16$$

egyenlség teljesül. Igazoljuk, hogy a négyzetszám!

Megoldás Tekintsük az adott relációt b-re nézve másodfokú egyenletnek. Ebbl $b = (a + 49) \pm 3\sqrt{a}$, amicsak úgy lehet egész, ha a négyzetszám.

VIII.3. Legyenek x és y olyan pozitív egészek, amelyekre teljesül az

$$3x^2 + x = 4y^2 + y$$

egyenlet. Bizonyítsuk be, hogy $(x - y)$, $(3x + 3y + 1)$ és $(4x + 4y + 1)$ mind négyzetszámok!

Megoldás Az x, y ismeretlenekre megadott egyenlet így is írható:

$$y^2 = 3x^2 - 3y^2 + x - y = (x - y)(3x + 3y + 1). \tag{1}$$

Ha p az $(x - y)$ egy prímosztója, akkor az (1) szerint y-t is osztja, míg $(3x + 3y + 1)$-et nem osztja, hiszen $(3x + 3y + 1) = 3(x - y) + 6y + 1$. Ez azt jelenti, hogy a $(x - y)$, $(3x + 3y + 1)$ tényezk relatív prímek, tehát szorzatuk csak úgy lehet négyzetszám, ha mindketten négyzetszámok. A megadott összefüggés egy másik alakja:

$$x^2 = 4x^2 - 4y^2 + x - y = (x - y)(4x + 4y + 1). \tag{2}$$

amibl az elzekhez hasonlóan adódik, hogy a $(4x + 4y + 1)$ tényez is teljes négyzet.

Megjegyzés Felmerül a kérdés, hogy van-e egyáltalán a feltételt kielégít (x, y) számpár. Egy megfelel számpárt számítógéppel gyorsan találhatunk: $x = 30$, $y = 26$ pld jó. Az összes (x, y) számpár elállítása nem könny feladat, a Pell egyenletek megoldási módszere lesz itt is alkalmazható.

VIII.4. Jelöljük a_n-nel a $\sqrt{n}$-hez legközelebbi egész számot. Számítsuk ki az

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_k}$$

összeget, ahol $k = 1999 \cdot 2000$.

Megoldás: Pontosan akkor lesz $a_n = k$, ha

$$(k - \frac{1}{2})^2 < k^2 - k + 1 \leq n \leq k^2 + k < (k + \frac{1}{2})^2.$$

Tehát épp $2k$ db n értékre teljesül az $a_n = k$ összefüggés, ilyen n-ekre az $\frac{1}{a_n}$ értékek összege 2. A teljes összeg $2 \cdot 1999 = 3998$.

VIII.5. Mely n egészekre lesz az

$$n^4 - 4n^3 + 14n^2 - 20n + 10$$

kifejezés értéke négyzetszám?

Megoldás

Vegyük észre, hogy $n^4 - 4n^3 + 14n^2 - 20n + 10 = (n^2 - 2n + 5)^2 - 15$, tehát ha az adott kifejezés értéke a^2 míg $(n^2 - 2n + 5) = b$, akkor $b^2 - a^2 = 15$, azaz $(b - a)(b + a) = 15$. Itt feltehet, hogy a és b nemnegatívak, st $b = (n - 1)^2 + 4 \geq 4$, tehát a lehetségek:

b	a	n
4	1	1
8	7	3 v. -1

Ha $b > 8$, akkor $b^2 - (b - 1)^2 = 2b - 1 > 15$, így nem kapunk megoldást. Tehát n lehetséges értékei: -1, 1 és 3.