1. alkalom

1. Beszínezzük a koordináta-rendszer rácspontjait. Egyetlen szabályt kell betartanunk: az (*a;b*) pontnak ugyanolyan színűnek kell lennie, mint az (*a-b;a*) és az (*a;b-a*) pontnak (*a* és *b* egész számok). Következik-e ebből, hogy a

a) (19;99) és a (199;3383);
b) (234;1001) és a (611;7007) pontok egyforma színűek lesznek?

2. Hány olyan n egész szám van, amelyre az

$$\frac{n+28}{n^2+30n+70}$$

tört egyszerűsíthető?

3. Bergengóciában csak 6 és 15 bengócosok vannak (a bengóc a bergengóc forint).

a) Hány bengócnyi összeget lehet kifizetni visszaadással?
b) És visszaadás nélkül?

4. Legfeljebb hány új egyenes jön létre, ha *n* általános helyzetű egyenes metszéspontjait összekötjük egymással? (*n* egyenes általános helyzetű, ha semelyik kettő sem párhuzamos egymással és semelyik három sem megy át ugyanazon a ponton.)

5. A koordináta-rendszer (0;0), (0;1), (1;0), (1;1) pontjában ül egy-egy bolha. Időnként egy bolha átugorja valamelyik másikat. Az „átugrott” bolha minden esetben az „ugró” bolha kiindulási és érkezési helye közti felezőpontban van. Lehetséges-e, hogy néhány ugrás után a bolhák egy nem egységnyi oldalú négyzet csúcsaiban üljenek?

6. Az *n* x *m*-es sakktábla egy fehér sarkából indul a futó. A tábla széléhez érve mindig elfordul derékszögben, ha sarokba és, megáll.

Milyen *n* és *m* esetén járja be a futó az összes fehér mezőt?

Megjegyzések: Az 1. feladat nehéznek bizonyult, az euklideszi algoritmussal való megismerkedés után visszatérünk rá. Az 5. feladatot nem beszéltük még meg, a 6-kal kapcsolatban részeredményeket találtunk.

2. alkalom

7. Melyek azok az n egész számok, amelyekre az

$$\frac{2n+28}{2n^2+31n+27}$$

tört egyszerűsíthető?

8. Határozzuk meg 11111111 és a 100 db 1-esből álló szám legnagyobb közös osztóját!

9. Egy konvex tízszög átlóinak legfeljebb hány metszéspontja lehet?

10. Adott a síkon hat pont úgy, hogy semelyik három nem esik egy egyenesbe. Meghúzzuk az összes pontpár által meghatározott szakasz felezőmerőlegesét. Legfeljebb hány egyenest kapunk? Ha ezek a felezőmerőlegesek mind különbözőek, akkor legfeljebb hány metszéspontjuk lehet?

KÖMAL határidő!!

Megjegyzések: Az 1., 2. feladatok megoldása után „kitárgyaltuk" az euklideszi algoritmust.

3. alkalom

11. Bergengóc Labdarúgó Bajnokságban 8 csapat vesz részt. A bajnokságot körmérkőzéses formában bonyolítják le, mindenki mindenkivel egyszer játszik. A fordulókat mindig hétvégén rendezik, és minden csapat minden hétvégén legfeljebb egy mérkőzést játszhat.

c) Meg lehet-e szervezni a bajnokságot úgy, hogy csak hét hétvégén legyen mérkőzés?

d) Szóba került a résztvevő csapatok számának emelése. 9 csapat esetén hány hétvége kellene a bajnokság lebonyolításához?

12. Kis számológépünk elromlott. Az osztás és a reciprok műveleteket nem tudja elvégezni. Ki lehet-e számolni vele

a) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$;

b) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ értékét?

13. Melyek azok az egész számok, amelyekre $x^2 + 2x - 4$ osztható 31-gyel?

14. Egy salakmotorversenyen 16 motoros vesz részt. Egy futamban négyen vannak a pályán. Meg lehet-e szervezni a futamokat úgy, hogy minden versenyző mindegyik másikkal pontosan egyszer találkozzék?

15. Adott egy körön 10 pont. Legfeljebb hány tartományra osztjuk a kör belsejét, ha mindegyik pontot összekötjük mindegyik másikkal?

Megjegyzés: A11. feladatot általánosítottuk. Az óra további részében a 14. feladatot tárgyaltuk. 16 résztvevő és 4-es futamok helyett megoldottuk a feladatot 9 résztvevővel és 3-as futamokkal, illetve 25 résztvevővel és 5-ös futamokkal. Láttuk, hogy ezek a megoldások a 4-es futamokkal 16 versenyzővel nem működnek, ami azon múlik, hogy a 4 nem prím.

Részletezve a megoldást 25 versenyzővel 5-ös futamokkal. Egy futamban $\binom{5}{2}$ „találkozás" van és összesen $\binom{25}{2}$ találkozásra van szükség, amiből a szükséges futamok száma 30-nak adódik.
A 25 résztvevőt jelöljük így:

(0;4) (1;4), (2;4) (3;4) (4;4)

(0;3) (1;3), (2;3) (3;3) (4;3)

(0;2) (1;2), (2;2) (3;2) (4;2)

(0;1) (1;1), (2;1) (3;1) (4;1)

(0;0) (1;0), (2;0) (3;0) (4;0)

Az ötös futamok az „egyenesek” lesznek, azaz az $y = mx + b$ egyenletek és az $x = c$ egyenletek megoldáshalmazai. Most azonban a jelek ötös maradékosztályokat jelölnek és az egyenlőség is mod 5 értendő. Az első típusú egyenesek száma a lehetséegs (m,b) párok számával egyenlő, ami 5·5=25, a második típusúakból pedig még 5 van, ami összesen 30.

Bármely két ponton pontosan egy egyenes halad át. Ezt úgy bizonyítottuk, hogy megmutattuk, bármely $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ pontpárhoz egyetlen c van, ha $x_1= x_2$, illetve egyetlen (m,b) pár van, ha $x_1\neq x_2$.

16 versenyzőre, 4-es futamokkal is van megoldás, de ezt még nem találtuk meg.

HF: 1., 6., 12., 13., 14. feladatok.

A következő alkalommal a Kömal B feladatok megoldásait beszéljük meg.

4. alkalom

A Kömal 2002 évi 6. száma B feladatainak megoldásait beszéltük meg.

Házi feladatok
A **B. 3566.** feladattal kapcsolatos kérdés: Hol helyezkednek el azok a *P* pontok az *ABC* szabályos háromszög síkjában, amelyekre az *AP, BP, CP* szakaszok közül az egyik hossza a másik kettő szakasz hosszának összegével egyenlő?

A **B. 3567.** feladattal kapcsolatos kérdés: *Affin transzformáció*nak nevezzük a sík olyan önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezését, amely *egyenestartó*, azaz három pont pontosan akkor van egy egyenesen, ha a transzformációnál származó képeik is egy egyenesen vannak. Affin transzformáció pld a korábbi tanulmányokból már ismert

tengelyes tükrözés;
elforgatás;
eltolás stb.;
középpontos hasonlóság;
merőleges tengelyes affinitás.

a) Mutassuk meg, hogy ha *A, B, C* tetszőleges nem kollineáris ponthármas és *A', B', C'* is tetszőleges nem kollineáris ponthármas, akkor van olyan affin transzformáció (a fent említett leképezések kompozíciója), amelynél *A* képe *A'*, *B* képe *B'*, *C* képe *C'* !
b) Mutassuk meg, hogy a fent említett transzformációk (nehezebb: minden affin transzformáció) megőrzi a párhuzamosságot, és a párhuzamos egyeneseken a szakaszok hosszának arányát!
c) Mutassuk meg, hogy a **B. 3567.** feladatban említett tulajdonságú ötszög egy szabályos ötszög affin transzformációnál származó képe!
d) Oldjuk meg a **B. 3567.** feladatot!

A **B. 3569.** feladattal kapcsolatosban szerepelt:
Ha a számegyenes K_1, K_2, ... K_n (korlátos) intervallumai közül bármelyik kettőnek van közös pontja, akkor az összesnek is van közös pontja!

Lépjünk ki a síkba!
Bizonyítsuk be, hogy ha a K_1, K_2, ... K_n korlátos és konvex síkbeli alakzatok közül bármelyik háromnak van közös pontja, akkor az összesnek is van közös pontja!

Lépjünk tovább a térbe! (Helly tételek)

Emlékeztető (korábbról maradt): **6.** és **14.** feladatok.

5. alkalom

Az órán lényegében az idén megjelent Új matematikai mozaik című könyv első cikkét dolgoztuk fel. A könyv a Typotex Kiadónál kapható.

A 12. feladattal kezdtünk. A feladat megoldása után a számfogalom fejlődéséről meséltem, áttekintettünk néhány ***számtest***et. A mod ***p*** maradékosztálytestek felelevenítése után visszatértünk a 14. feladathoz. Kétféle módon is megkonstruáltuk a feladat mélyén rejlő négyelemű testet.

6. alkalom

Megbeszéltük az 1., 3. és 6. feladatokat, ezek kapcsán felelevenítettük az Euklideszi algoritmust, megismerkedtünk az irreducibilis polinom fogalmával, talán jobban megértettük, hogy miként lehet véges testeket gyártani.

7. alkalom

A Kömal 2002 évi 7. száma B feladatainak megoldásait beszéltük meg.