FPI tehetséggondozó szakkör 9. évf. II. foglalkozás, 2010. szeptember 29.

Halmazok és logika, 9c, 2010. szeptember 14.

2.1.
Keressük meg a csivambákra vonatkozó alábbi logikai állítások halmazábrás megfelelit!

I. Minden börösznyeg pöndörg.

II. Ha egy csivamba börösznyeg, akkor pöndörg.

III. Ha egy csivamba pöndörg, akkor börösznyeg.

IV. Nincs olyan börösznyeg, aki nem lenne pöndörg.

V. Ha A pöndörg, akkor biztosan nem börösznyeg.

VI. Ha A börösznyeg, akkor biztosan nem pöndörg.

VII. Van olyan börösznyeg, aki nem pöndörg.

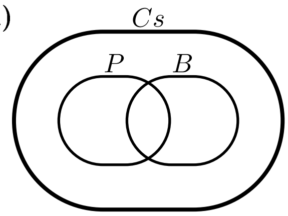
VIII. B ugyan pöndörg, mégsem börösznyeg.

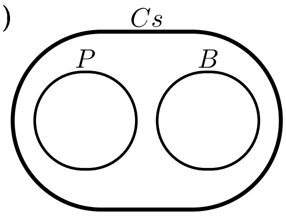
IX. Ha egy csivamba nem pöndörg, akkor biztosan börösznyeg.

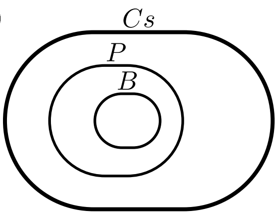
X. Ha egy csivamba nem börösznyeg, akkor biztosan pöndörg.

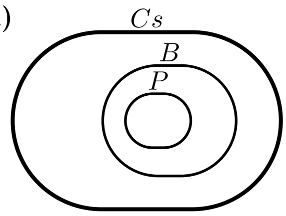
XI. Egy csivamba vagy pöndörg vagy legalábbis börösznyeg.

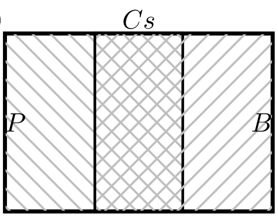
XII.* Egy csivamba vagy pöndörg vagy börösznyeg.

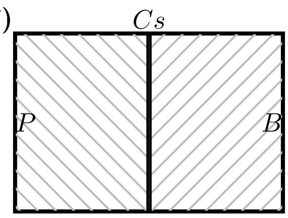
a)


b)


c)


d)


e)


f)


2.2. Adott négy állítás, mindegyik az x pozitív egész számra vonatkozik.
A) x osztható 9-cel;
B) x számjegyeinek összege osztható 9-cel;
C) x osztható 27-tel;
D) x számjegyeinek összege osztható 27-tel.
A négy állítás közül melyikbl melyik következik?

2.3. Egy adott AB szakasz hosszát jelölje d. B-n át húzunk e egyenest, és B-bl felmérjük rá a d távolságot. Így megkapjuk a C pontot. C-n át párhuzamost húzunk AB-vel, és C-bl felmérjük rá d-t.

Így kapjuk a D pontot. A szerkesztést megismételjük minden (AB-tl különböz) e egyenesre. Mi a BD szakaszok F felezpontjának a halmaza?

2.4. Egy legalább kétjegy négyzetszám tudjuk, hogy utolsó eltti jegye páratlan. Mi lehet az utolsó jegye?

2.5. Adott az $ABCD$ négyzet. Ismert a P távolsága a négyzet három csúcsától:

$$PA = 1, \qquad PB = 5, \qquad PC = 7.$$

Határozzuk meg a P pont távolságát a négyzet negyedik csúcsától!

2.6. Egy 2010×2010-es négyzetbe beírtuk 1-tl 2010^2-ig a természetes számokat egymás után úgy, hogy elször az els sorban balról jobbra írtuk ket, majd a második sorban is balról jobbra írtuk ket és így tovább. Válasszunk ki a beírt számok közül 2010-et úgy, hogy mindegyik más oszlopból és más sorból való legyen! Ezeknek a számoknak az összege hány különböz értéket adhat?

Házi feladatok
2.7.
A csivambák közt vannak börösznyegek, vannak, akik pöndörgk és a csivambák között egyesek szeretnek kongutálni. Ábrázoljuk ezek halmazait, ha tudjuk, hogy (minden alpont külön-külön feladat)

I. Ha egy pöndörg börösznyeg, akkor biztosan szeret kongutálni.

II. Minden olyan börösznyeg, aki pöndörg, az szeret kongutálni.

III. Ha egy csivamba szeret kongutálni, akkor pöndörg börösznyeg.

IV. Nincsen olyan pöndörg börösznyeg, aki ne szeretne kongutálni.

V. A nem pöndörg börösznyegek kongutálni se szeretnek, míg azok a pöndörgk, akik nem börösznyegek mind imádnak kongutálni.

VI. Akkor és csakis akkor szeret kongutálni egy csivamba, ha olyan pöndörg, aki nem börösznyeg.

VII. Pontosan akkor pöndörg egy nem börösznyeg, ha szeret kongutálni.
2.8. Öt szám páronként vett összege a következ eredményeket adja:
a) $-7, -4, -1, -1, 1, 5, 5, 8, 11$;
b) $-7, -4, -1, -1, 1, 3, 5, 5, 8, 11$;
c) $-7, -4, -1, -1, 2, 2, 5, 5, 8, 11$.
Lehet-e tudni, mi volt az öt szám?

2.9. Az n pozitív egész szám mely értékeire igaz, hogy $n^2 + 4n - 5$ egy egész szám négyzete?

FPI tehetséggondozó szakkör 9. évf. III. foglalkozás, 2010. október 6.

Pótlás

2.6. Egy 2010×2010-es négyzetbe beírtuk 1-tl 2010^2-ig a természetes számokat egymás után úgy, hogy elször az els sorban balról jobbra írtuk ket, majd a második sorban is balról jobbra írtuk ket és így tovább. Válasszunk ki a beírt számok közül 2010-et úgy, hogy mindegyik más oszlopból és más sorból való legyen! Ezeknek a számoknak az összege hány különböz értéket adhat?

2.5. Adott az $ABCD$ négyzet. Ismert a P távolsága a négyzet három csúcsától:

$$PA = 1, \qquad PB = 5, \qquad PC = 7.$$

Határozzuk meg a P pont távolságát a négyzet negyedik csúcsától!

Házi feladatok voltak

2.7.
A csivambák közt vannak börösznyegek, vannak, akik pöndörgk és a csivambák között egyesek szeretnek kongutálni. Ábrázoljuk ezek halmazait, ha tudjuk, hogy (minden alpont külön-külön feladat)

I. Ha egy pöndörg börösznyeg, akkor biztosan szeret kongutálni.

II. Minden olyan börösznyeg, aki pöndörg, az szeret kongutálni.

III. Ha egy csivamba szeret kongutálni, akkor pöndörg böröszneg.

IV. Nincsen olyan pöndörg böröszneg, aki ne szeretne kongutálni.

V. A nem pöndörg böröszneyegek kongutálni se szeretnek, míg azok a pöndörgk, akik nem böröszneyegek mind imádnak kongutálni.

VI. Akkor és csakis akkor szeret kongutálni egy csivamba, ha olyan pöndörg, aki nem böröszneg.

VII. Pontosan akkor pöndörg egy nem böröszneg, ha szeret kongutálni.

2.8. Öt szám páronként vett összege a következ eredményeket adja:
a) -7, -4, -1, -1, 1, 5, 5, 8, 11;
b) -7, -4, -1, -1, 1, 3, 5, 5, 8, 11;
c) -7, -4, -1, -1, 2, 2, 5, 5, 8, 11.
Lehet-e tudni, mi volt az öt szám?

2.9. Az n pozitív egész szám mely értékeire igaz, hogy $n^2 + 4n - 5$ egy egész szám négyzete?

Új feladatok

3.1.
Az alábbi állítások közül melyik igaz?

A) Ha egy négyszög paralelogramma, akkor van két szemköztes oldala, amelyek párhuzamosak és a másik két párhuzamos oldal hossza egyenl.

B) Ha egy négyszögnek van két szemköztes oldala, amelyek párhuzamosak és a másik két párhuzamos oldal hossza pedig egyenl, akkor az a négyszög paralelogramma.

C) Ha egy deltoidnak van derékszöge, akkor húrnégyszög[1].

D) Ha egy deltoid húrnégyszög, akkor van derékszöge.

E) Egy paralelogramma pontosan akkor húrnégyszög, ha téglalap.

3.2. *Kocsis Szilveszter javaslata*

a) Elhelyezhet-e egy 4×4-es táblán 10 korong úgy, hogy minden sorban, illetve oszlopban páros sok korong legyen? (A korongokat egymásra helyezni nem szabad.)

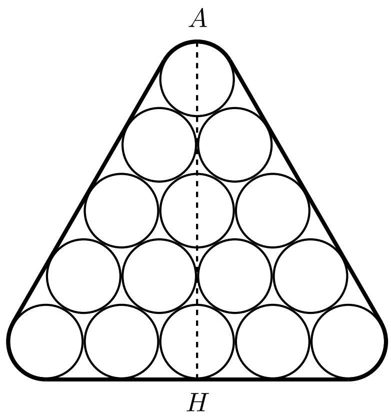
b) És elhelyezhet-e egy 4×5-ös táblán 10 korong úgy, hogy minden sorban, illetve oszlopban páratlan sok korong kerüljön?

3.3. Igaz-e, hogy $n^5 - 5n^3 + 4n$ bármely n egész szám esetén osztható 120-szal?

3.4. *Matematika határok nélkül 1989/90, A biliárd és a golyók*

Az „amerikai biliárd” játszma kezdetén a biliárdgolyók az ábrán látható módon, egy kerettel összeszorítva állnak az asztal közepén. A golyók átmérje egyenl.

Mekkora egy golyó átmérje, ha az AH távolság $169,6$ mm-rel egyenl?



3.5. Egy kör két merleges húrja egymást a és b, illetve c és d hosszúságú részekre osztja. Fejezzük ki a kör sugarát a-, b-, c-, d-vel.

[1]Húrnégyszög: olyan négyszög, amelynek csúcsai illeszkednek egy körre (az oldalai egy kör húrjai)

FPI tehetséggondozó szakkör 9. évf. IV. foglalkozás, 2010. október 13.

Pótlás, házi feladatok

3.1.
Az alábbi állítások közül melyik igaz?

A) Ha egy négyszög paralelogramma, akkor van két szemköztes oldala, amelyek párhuzamosak és a másik két párhuzamos oldal hossza egyenl.

B) Ha egy négyszögnek van két szemköztes oldala, amelyek párhuzamosak és a másik két párhuzamos oldal hossza pedig egyenl, akkor az a négyszög paralelogramma.

C) Ha egy deltoidnak van derékszöge, akkor húrnégyszög[2].

D) Ha egy deltoid húrnégyszög, akkor van derékszöge.

E) Egy paralelogramma pontosan akkor húrnégyszög, ha téglalap.

3.2. *Kocsis Szilveszter javaslata*

a) Elhelyezhet-e egy 4×4-es táblán 10 korong úgy, hogy minden sorban, illetve oszlopban páros sok korong legyen? (A korongokat egymásra helyezni nem szabad.)

b) És elhelyezhet-e egy 4×5-ös táblán 10 korong úgy, hogy minden sorban, illetve oszlopban páratlan sok korong kerüljön?

3.3. Igaz-e, hogy $n^5 - 5n^3 + 4n$ bármely n egész szám esetén osztható 120-szal?

3.5. Egy kör két merleges húrja egymást a és b, illetve c és d hosszúságú részekre osztja. Fejezzük ki a kör sugarát a-, b-, c-, d-vel.

2.8. Öt szám páronként vett összege a következ eredményeket adja:
a) -7, -4, -1, -1, 1, 5, 5, 8, 11;
b) -7, -4, -1, -1, 1, 3, 5, 5, 8, 11;
c) -7, -4, -1, -1, 2, 2, 5, 5, 8, 11.
Lehet-e tudni, mi volt az öt szám?

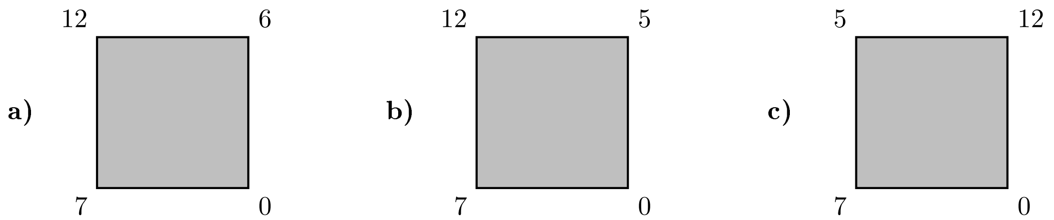
[2] Húrnégyszög: olyan négyszög, amelynek csúcsai illeszkednek egy körre (az oldalai egy kör húrjai)

Új feladatok

4.1. Vegyünk fel 7 különböző pontot a síkon úgy, hogy ha azokat páronként összekötjük, akkor összesen
a) 20, **b)** 17, **c)** 14
különböz egyenest kapjunk!

4.2. Egy matematikaversenyen a versenyzk 85%-a megoldotta az els feladatot. A második feladatot 80%-uk oldotta meg. A harmadik feladatot 75%-uk oldotta meg.
Legalább hányan oldhatták meg mindhárom feladatot?

4.3. Egy négyzet csúcsaiba számokat írtunk. Egy-egy alkalommal két szomszédos csúcs mindegyikében 1-gyel növeljük az ott lev számokat. Az alábbi helyzetek közül melyekbl kiindulva érhet el, hogy mindegyik csúcsban ugyanaz a szám álljon?



4.4. Adott egy derékszög érinttrapéz. Fejezzük ki az alapokra merleges szár hosszát az alapok segítségével!

4.5.
a) Két kör az A pontban kívülrl érinti egymást. Egyik közös küls érintjük a két kört az E és F pontban érinti. Mekkora az EAF szög?
b) Két kör kívülrl érinti egymást. Az egyik közös küls érint a két kört E-ben, illetve F-ben érinti. Igazoljuk, hogy az EF mint átmér fölé rajzolt Thálész-kör érinti a két kör centrálisát!
c) Az O és O' közep körök kívülrl érintik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az OO' mint átmér fölé rajzolt Thálész-kör érinti a két közös küls érintt!
d) Két kör kívülrl érinti egymást. Fejezzük ki közös küls érintjük hosszát a sugaraikkal!

Házi feladatok

4.6. Legfeljebb hány metszéspontja lehet

a) két négyszögnek? **b)** egy négyszögnek és egy ötszögnek?

4.7. Egy háromszög csúcsaihoz gyufákat helyeztünk. Egy lépésben bármelyik csúcstól elvehetünk néhány gyufaszálat, de ekkora másik két csúcs mindegyikéhez kétszer annyi gyufát kell helyeznünk. Elérhet-e, hogy a három csúcsnál egyenl számú gyufa legyen, ha kezdetben az egyes csúcsoknál
a) 5, 9, 11
b) 5, 11, 14
szál gyufa volt?

4.8 Egyenl szárú-e minden olyan háromszög, melyben a beírt kör középpontja egyenl távolságra van
a) két csúcstól?
b) két oldal felezpontjától?

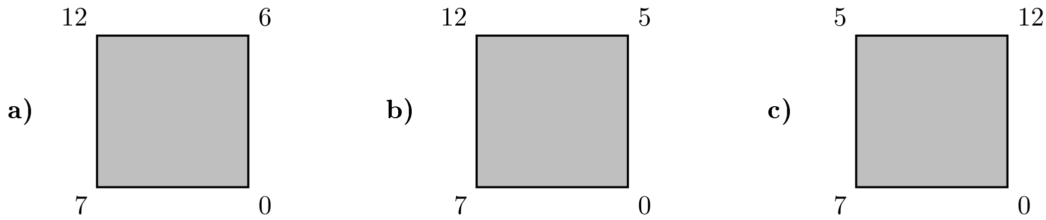
FPI tehetséggondozó szakkör 9. évf. V. foglalkozás, 2010. október 20.

Pótlás, házi feladatok

3.5. Egy kör két merleges húrja egymást a és b, illetve c és d hosszúságú részekre osztja. Fejezzük ki a kör sugarát a-, b-, c-, d-vel.

2.8. Öt szám páronként vett összege a következ eredményeket adja:
a) -7, -4, -1, -1, 1, 5, 5, 8, 11;
b) -7, -4, -1, -1, 1, 3, 5, 5, 8, 11;
c) -7, -4, -1, -1, 2, 2, 5, 5, 8, 11.
Lehet-e tudni, mi volt az öt szám?

4.3. Egy négyzet csúcsaiba számokat írtunk. Egy-egy alkalommal két szomszédos csúcs mindegyikében 1-gyel növeljük az ott lev számokat. Az alábbi helyzetek közül melyekbl kiindulva érhet el, hogy mindegyik csúcsban ugyanaz a szám álljon?



4.1. Vegyünk fel 7 különböző pontot a síkon úgy, hogy ha azokat páronként összekötjük, akkor összesen
a) 20, **b)** 17, **c)** 14
különböz egyenest kapjunk!

4.2. Egy matematikaversenyen a versenyzk 85%-a megoldotta az els feladatot. A második feladatot 80%-uk oldotta meg. A harmadik feladatot 75%-uk oldotta meg.
Legalább hányan oldhatták meg mindhárom feladatot?

4.5.
a) Két kör az A pontban kívülrl érinti egymást. Egyik közös küls érintjük a két kört az E és F pontban érinti. Mekkora az EAF szög?
b) Két kör kívülrl érinti egymást. Az egyik közös küls érint a két kört E-ben, illetve F-ben érinti. Igazoljuk, hogy az EF mint átmér fölé rajzolt Thálész-kör érinti a két kör centrálisát!
c) Az O és O' közep körök kívülrl érintik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az OO' mint átmér fölé rajzolt Thálész-kör érinti a két közös küls érintt!
d) Két kör kívülrl érinti egymást. Fejezzük ki közös küls érintjük hosszát a sugaraikkal!

4.6. Legfeljebb hány metszéspontja lehet

a) két négyszögnek? **b)** egy négyszögnek és egy ötszögnek?

4.7. Egy háromszög csúcsaihoz gyufákat helyeztünk. Egy lépésben bármelyik csúcstól elvehetünk néhány gyufaszálat, de ekkora másik két csúcs mindegyikéhez kétszer annyi gyufát kell helyeznünk. Elérhet-e, hogy a három csúcsnál egyenl számú gyufa legyen, ha kezdetben az egyes csúcsoknál
a) 5, 9, 11
b) 5, 11, 14
szál gyufa volt?

4.8 Egyenl szárú-e minden olyan háromszög, melyben a beírt kör középpontja egyenl távolságra van
a) két csúcstól?
b) két oldal felezpontjától?

FPI tehetséggondozó szakkör 9. évf. VI. foglalkozás, 2010. október 27.

Pótlás, házi feladatok

4.1. Vegyünk fel 7 különböző pontot a síkon úgy, hogy ha azokat páronként összekötjük, akkor összesen **a)** 20, **b)** 17, **c)** 14 különböz egyenest kapjunk!

4.2. Egy matematikaversenyen a versenyzk 85%-a megoldotta az els feladatot. A második feladatot 80%-uk oldotta meg. A harmadik feladatot 75%-uk oldotta meg.
Legalább hányan oldhatták meg mindhárom feladatot?

4.5.
a) Két kör az A pontban kívülrl érinti egymást. Egyik közös küls érintjük a két kört az E és F pontban érinti. Mekkora az EAF szög?
b) Két kör kívülrl érinti egymást. Az egyik közös küls érint a két kört E-ben, illetve F-ben érinti. Igazoljuk, hogy az EF mint átmér fölé rajzolt Thálész-kör érinti a két kör centrálisát!
c) Az O és O' közep körök kívülrl érintik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az OO' mint átmér fölé rajzolt Thálész-kör érinti a két közös küls érintt!
d) Két kör kívülrl érinti egymást. Fejezzük ki közös küls érintjük hosszát a sugaraikkal!

4.6. Legfeljebb hány metszéspontja lehet

a) két négyszögnek? **b)** egy négyszögnek és egy ötszögnek?

4.7. Egy háromszög csúcsaihoz gyufákat helyeztünk. Egy lépésben bármelyik csúcstól elvehetünk néhány gyufaszálat, de ekkora másik két csúcs mindegyikéhez kétszer annyi gyufát kell helyeznünk. Elérhete, hogy a három csúcsnál egyenl számú gyufa legyen, ha kezdetben az egyes csúcsoknál
a) 5, 9, 11
b) 5, 11, 14
szál gyufa volt?

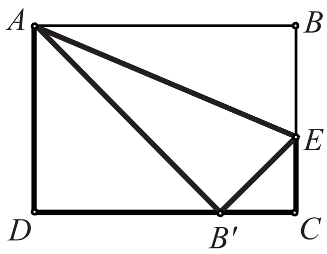
4.8 Egyenl szárú-e minden olyan háromszög, melyben a beírt kör középpontja egyenl távolságra van
a) két csúcstól?
b) két oldal felezpontjától?

Új feladatok

6.1. Az alábbi állítások közül melyek igazak minden n egész szám esetén?
a) $3|n^3 - n$; **b)** $5|n^5 - n$; **c)** $7|n^7 - n$; **d)** $9|n^9 - n$.

6.2. Igaz-e, hogy ha három 3-nál nagyobb prímszám számtani sorozatot alkot, akkor a sorozat különbsége osztható 6-tal?

6.3. Az A4 és A3 méret papírlapokról a következk tudhatók:
1. Egy A3-as lapot félbetépve két A4-es méret lapot kapunk.
2. Az A4-es lap felnagyítható A3-assá.
a) Határozzuk meg az A4-es (és A3-as) lap oldalainak arányát!
b) Egy A4-es lapot az A csúcsán átmen AE egyenes mentén behajtjuk és azt tapasztaljuk, hogy B csúcsa épp a CD oldalra kerül (lásd az alábbi ábrát, ahol $B' \in CD$!). Igaz-e, hogy a $CB'E$ háromszög egyenl szárú?



Kutatómunka
Melyik az a tíz 3000-nél kisebb törzsszám, amely számtani sorozatot alkot?

FPI tehetséggondozó szakkör 9. évf. VII. foglalkozás, 2010. november 10.

7.1. Adott száz különböz pont a síkon. Létezik-e olyan

a)egyenes

b) HF kör

amelyik kettéfelezi ezeket?

7.2. Az igazmondók és a hazudósok szigetén, (ahol mindenki vagy igazat mond, vagy hazudik) megkérdezünk egy szobában 11 bennszülöttet, hogy mondják el, hogy hány igazmondó van a teremben. A megkérdezettek ezeket a válaszokat adták:

a) 8, 6, 4, 3, 1, 4, 5, 1, 3, 3, 2
Tudhatjuk-e, hogy hány igazmondó van a teremben?

b) 7, 4, 0, 1, 5, 7, 7, 1, 9, X, X
Kettjükét nem hallottuk. Tudhatjuk-e, hogy hány igazmondó van a teremben?

c) Adjunk meg 11 olyan számot, ami nem hangozhatott el azon a szigeten.

7.3. Adott egy O_1 középpontú, 3 egység sugarú k_1 kör, és egy O_2 középpontú, 4 egység sugarú k_2 kör a síkon, O_1 és O_2 távolsága 8 egység. Mindegyik kör középpontjából érintöket húzunk a másik körhöz. Igazoljuk, hogy az O_1-böl húzott érintök k_1 körrel való metszéspontjainak távolsága egyenlö az O_2-böl húzott érintök k_2 körrel való metszéspontjainak távolságával!

7.4. Mennyi lehet maximum két ötszög metszéspontjainak a száma?

7.5. Anna és Bea egy játékot játszanak. Négyzet alakzatban van nxn darab korong az asztalon. Felváltva lépnek, Anna kezd és minden lépésben el kell vennie egy sorból, vagy egy oszlopból legalább egyet, maximum amennyi a sorban van. Keressetek nyer stratégiát, ha:

a) $n = 6$

b) $n = 5$

És az nyer, aki az utolsót leveszi az asztalról.
c) HF $n = 5$

És az veszít, aki az utolsót leveszi az asztalról.

7.6. Van-e olyan x és y egész szám, amelyekre teljesül, hogy $3x^2 + 8 = y^2$

9-es tehetséggondozó szakkör, 2010. november 17.

Pótlás, házi feladatok

7.1.b Adott száz különböz pont a síkon. Létezik-e olyan kör, amelyik kettéfelezi ezeket?

7.4. Mennyi lehet maximum két ötszög metszéspontjainak a száma?

7.5. Anna és Bea egy játékot játszanak. Négyzet alakzatban van nxn darab korong az asztalon. Felváltva lépnek, Anna kezd és minden lépésben el kell vennie egy sorból, vagy egy oszlopból legalább egyet, maximum amennyi a sorban van. Keressetek nyer stratégiát, ha:

a.: n=6

b.: n=5

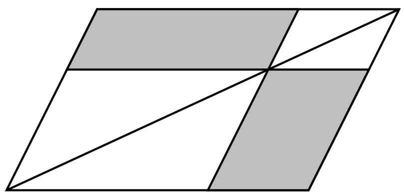
És az nyer, aki az utolsót leveszi az asztalról.
c.: n=5

És az veszít, aki az utolsót leveszi az asztalról.

7.6. Van-e olyan x és y egész szám, amelyekre teljesül, hogy $3x^2 + 8 = y^2$

8.1. Van-e olyan x és y egész szám, amelyekre teljesül, hogy $3x^2 = y^2$

8.2 Egy paralelogramma egyik átlóján kiválasztunk egy pontot és ezen át párhuzamosokat húzunk az oldalakkal. Igazoljuk, hogy a két satírozott paralelogramma területe egyenl!



8.3 Igaz-e, hogy minden 3-nál nagyobb prímszámnak van 6-tal osztható szomszédja?

FPI tehetséggondozó szakkör 9. évf. IX. foglalkozás, 2010. november 24.

9.1. Határozza meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely (a tízes számrendszerben) csak 0 és 1-es számjegyekbl áll, és osztható 792-vel!

9.2. (*Dobos Sándor példája*)
Számrontó Rezsnek két módszere van egy szám elrontására. Vagy egy számjegyet tetszlegesen megváltoztat (pld. 5437 → 5487), vagy két számjegyet kicserél (pld. 5437 → 3457). Egyszer véletlenül az asztalon hagytam egy cetlit a másológép négyjegy belépési számával. Rezs ezt meglátta és rögtön átjavította 1323-ra. Szerencsére észrevettem, és visszajavítottam az eredeti számra. De, amikor legközelebb lehetsége adódott Rezs megint elrontotta a cetlin lév számot, így most 1213 van ráírva. Mi lehet a másológép belépési száma?

9.3. *KÖMAL, 2010. október, C. 1045. feladat*
Dobjunk három szabályos dobókockával. Írjuk fel egymás mellé tetszleges sorrendben a dobott pöttyök számát. Ugyanilyen sorrendben folytassuk az írást az alsó lapon látható pöttyök számával. Igazoljuk, hogy az így kapott hatjegy szám és a 111 hányadosát 7-tel csökkentve, és ezt a különbséget 9-cel osztva olyan háromjegy számot kapunk, amelynek a számjegyei a dobott pöttyök számát adják.

9.4. *KÖMAL, 2010. október, C. 1045. feladat*
Egy cég 10 szériában gyártott egész kg-os súlyokat. Az els szériában 1, a másodikban 2, a harmadikban 3, ... a tizedikben 10 kg-os súlyokat terveztek készíteni. Az azonos szériában készült egyforma súlyokat ugyanabban a ládában tartják, mind a 10 ládára rá van írva, hogy hanyadik szériában készült. Az egyik széria hibás lett, példányai egyforma súlyúak, de ez az érték nem egyezik meg az elre adott értékkel.

a) Egy kijelzs mérleg egyszeri használatával kell megtalálnunk, hogy mennyivel nehezebbek vagy könnyebbek a hibás súlyok az elírtnál.

b) Ezután határozzuk meg, hogy melyik súly szériája lett hibás! Most is csak a kijelzs mérleget használhatjuk, és azt is csak még egyszer.

9.5. *KÖMAL, 2010. október, B. 4300. feladat*
Bizonyítsuk be, hogy 35 egymást követ pozitív egész szám négyzetének összege mindig osztható 35-tel.

9.6. *KÖMAL, 2010. október, C. 1049. feladat*
Egy 2 egység oldalú négyzet két szomszédos oldala mint átmér fölé köröket rajzolunk. Mekkora annak a körnek a sugara, amely a négyzet oldalát és az egyik kört belülrl, a másik kört kívülrl érinti?

9.7.
a) Az 1, 2, 3, ... 16 számok közül kell kitalálni egyet barkochba kérdésekkel. Legalább hány kérdésre van szükség?
b) És ha a kérdéseket elre le kell írni, azaz a következ kérdés nem függhet az elzre kapott választól?

9.8. Legyen az ABC háromszög AC oldalának felezpontja D, továbbá messe a C-n és BD szakasz F felezpontján átmen egyenes az AB oldalt az E pontban! Milyen arányban osztja ketté E az AB oldalt?

FPI tehetséggondozó szakkör 9. évf. X. foglalkozás, 2010. december 1.

10.1. A következ szavakban egy-egy bett megváltoztathatsz, de értelmes magyar szót kell kapnod. Hány megoldás van az egyes esetekben? **a)** HÁZ, **b)** KEREK.

9.7.

a) Az 1, 2, 3, ... 16 számok közül kell kitalálni egyet barkochba kérdésekkel. Legalább hány kérdésre van szükség?

b) És ha a kérdéseket elre le kell írni, azaz a következ kérdés nem függhet az elzre kapott választól?

9.8. Legyen az ABC háromszög AC oldalának felezpontja D, továbbá messe a C-n és BD szakasz F felezpontján átmen egyenes az AB oldalt az E pontban! Milyen arányban osztja ketté E az AB oldalt?

10.2. Keresd meg a legkisebb olyan természetes számot, ami 56-ra végzdik, osztható 56-tal, és számjegyeinek összege éppen 56!

9.4. Egy cég 10 szériában gyártott egész kg-os súlyokat. Az els szériában 1, a másodikban 2, a harmadikban 3, ... a tizedikben 10 kg-os súlyokat terveztek készíteni. Az azonos szériában készült egyforma súlyokat ugyanabban a ládában tartják, mind a 10 ládára rá van írva, hogy hanyadik szériában készült. Az egyik széria hibás lett, példányai egyforma súlyúak, de ez az érték nem egyezik meg az elre adott értékkel.

d) Módosítunk az eredeti feladaton. Tegyük fel, hogy mindegyik súly megfelel tömeg (az egyes szériákban rendre 1, 2, ... 10 kg), de elfordulhat, hogy amikor a ládákat a bennük lév súlyok növekv sorrendjében betolták a raktárba egymás mellé, akkor két szomszédos ládát felcseréltek. Ezután rakták rájuk sorban a szériaszámokat, amelyek így most növekv sorrendben vannak, de lehet, hogy az egyik szomszédos párnál nem a ládában lev súlyok tömegét jelzik.

Hány méréssel lehet megállapítani, hogy történt-e ilyen tévesztés?

10.3. Egy cég 5 szériában gyártott súlyokat. Az egyes szériákon belül mindegyik súly egyforma tömeg, de nem ismert, hogy mekkorák. Az éppen távol lev cégvezet meg szeretné tudni, hogy milyen tömeg súlyokat gyártottak. Ezért egy mérési rlapot küld egyik alkalmazottjának, majd annak kell elvégeznie a méréseket, és visszaküldeni az eredményekkel kitöltött rlapot.

Legalább hány mérést kell elvégezni, és mik legyenek ezek a mérések (hogyan töltse ki a cégvezet az 1., 2., ..., 5. oszlopokat), ha várható, hogy (legfeljebb) egyszer az alkalmazott hibás értéket ír be a „Mért tömeg” rovatba?

Az rlap így néz ki:

	Hány súly legyen az egyes szériákból a mérlegen?					Mért tömeg
	1. széria	2. széria	3. széria	4. széria	5. széria	(kg)
1. mérés						
2. mérés						
3. mérés						
4. mérés						
5. mérés						
6. mérés						
7. mérés						
8. mérés						
9. mérés						
10. mérés						
11. mérés						

10.4. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög leghosszabb oldalához tartozó magassága nem hosszabb, mint ugyanennek az oldalnak egy tetszleges pontjából a másik két oldalra állított merleges szakaszok hosszának az összege!

10.5. Bergengóciában a totó, a bajnokságnak megfelelen csak 4 mérkzést tartalmaz. Minden mérkzés eredményére háromféleképpen lehet tippelni: 1-gyel, 2-vel vagy X-szel. Egy szelvényen csak egy tipposzlop van.

a) Hány szelvényt kell venni ahhoz, hogy biztosan legyen telitalálatunk?

b) És ahhoz, hogy biztosan legyen olyan szelvényünk, amely legalább 3 találatos?

10.2. megoldása: A keresett szám fölírható $A \cdot 100 + 56$ alakban. $56|A \cdot 100$, így $14|A$, azaz A páros és osztható 7-tel, jegyeinek összege pedig 56-(5+6) = 45. A legkisebb olyan páros szám, amelyben a jegyek összege 45 a 199998, de ez nem osztható 7-tel. A következ a 289998, majd a 298998. Ez utóbbi osztható csak 7-tel. Tehát a keresett szám a 29899856.

FPI tehetséggondozó szakkör 9. évf. XI. foglalkozás, 2010. december 8.

Ismétlés:

9.4. Egy cég 10 szériában gyártott egész kg-os súlyokat. Az els szériában 1, a másodikban 2, a harmadikban 3, ... a tizedikben 10 kg-os súlyokat terveztek készíteni. Az azonos szériában készült egyforma súlyokat ugyanabban a ládában tartják, mind a 10 ládára rá van írva, hogy hanyadik szériában készült. Az egyik széria hibás lett, példányai egyforma súlyúak, de ez az érték nem egyezik meg az elre adott értékkel.

a) Egy kijelzs mérleg egyszeri használatával kell megtalálnunk, hogy mennyivel nehezebbek vagy könnyebbek a hibás súlyok az elírtnál.

b) Ezután határozzuk meg, hogy melyik súly szériája lett hibás! Most is csak a kijelzs mérleget használhatjuk, és azt is csak még egyszer.

d) Módosítunk az eredeti feladaton. Tegyük fel, hogy mindegyik súly megfelel tömeg (az egyes szériákban rendre 1, 2, ... 10 kg), de elfordulhat, hogy amikor a ládákat a bennük lév súlyok növekv sorrendjében betolták a raktárba egymás mellé, akkor két szomszédos ládát felcseréltek. Ezután rakták rájuk sorban a szériaszámokat, amelyek így most növekv sorrendben vannak, de lehet, hogy az egyik szomszédos párnál nem a ládában lev súlyok tömegét jelzik.
Hány méréssel lehet megállapítani, hogy történt-e ilyen tévesztés?

11.1.
a) *Juli* Egy értelmes ötbets magyar szót írt le *Laci*-nak. *Laci* próbálja kiolvasni a szót, de az egyik betn elmaszatolódott a tinta, nem olvasható ki. Segítsünk neki!

a1) MA■OM, **a2)** BIG■Ó, **a3)** P■INT

b) Felmerült, hogy az egyik bett esetleg elírta *Juli*. Melyik esetben lehetünk biztosak benne, hogy elírás történt? Melyik esetben mi lehetett az eredeti szó?

b1) BONHA, **b2)** SANKA, **b3)** BOLHA, **b4)** TORMA

11.2. A térbeli sakktáblán a bástya a tábla oldaléleivel párhuzamosan tud lépni. Legfeljebb hány bástya helyezhet el a táblán úgy, hogy semelyik kett se üsse egymást, ha a tábla
a) $3 \times 3 \times 3$-as?
b) $8 \times 8 \times 8$-as?

10.3. Egy cég 5 szériában gyártott súlyokat. Az egyes szériákon belül mindegyik súly egyforma tömeg, de nem ismert, hogy mekkorák. Az éppen távol lev cégvezet meg szeretné tudni, hogy milyen tömeg súlyokat gyártottak. Ezért egy mérési rlapot küld egyik alkalmazottjának, majd annak kell elvégeznie a méréseket, és visszaküldeni az eredményekkel kitöltött rlapot.

Legalább hány mérést kell elvégezni, és mik legyenek ezek a mérések (hogyan töltse ki a cégvezet az 1., 2., ..., 5. oszlopokat), ha várható, hogy (legfeljebb) egyszer az alkalmazott hibás értéket ír be a „Mért tömeg” rovatba?

Az rlap így néz ki:

	Hány súly legyen az egyes szériákból a mérlegen?					Mért tömeg
	1. széria	2. széria	3. széria	4. széria	5. széria	(kg)
1. mérés						
2. mérés						
3. mérés						
4. mérés						
5. mérés						
6. mérés						
7. mérés						
8. mérés						
9. mérés						
10. mérés						
11. mérés						

10.5. Bergengóciában a totó, a bajnokságnak megfelelen csak 4 mérkzést tartalmaz. Minden mérkzés eredményére háromféleképpen lehet tippelni: 1-gyel, 2-vel vagy X-szel. Egy szelvényen csak egy tipposzlop van.

a) Hány szelvényt kell venni ahhoz, hogy biztosan legyen telitalálatunk?

b) És ahhoz, hogy biztosan legyen olyan szelvényünk, amely legalább 3 találatos?

11.3. Keress háromféle bet alkalmazásával minél több szóból álló négybets

a) 1-hibajelz kódot!

b) 1-hibajavító kódot!

11.4. A szenvedélyes játékosok már régóta keresik az olyan nyeresélyes tipprendszereket, úgynevezett totókulcsokat, mint amilyet az 10.5. feladatban is kerestünk. Mégis, már „kicsinek” tn esetekben sem ismeretes, hogy legkevesebb hány szelvény kell bizonyos számú találat eléréséhez.

Az alábbi táblázat mutatja, hogy mit tudott a világ 1995-ben. n a mérkzések számát jelöli, r pedig azt mutatja, hogy legfeljebb hány találatot engedünk ki a kezünkbl. Az 5.6 feladat az $n = 4$, $r = 1$ esetnek felel meg.

n/r	**1**	**2**	**3**
1	1		
2	3	1	
3	5	3	1
4	9	3	3
5	27	8	3
6	63-73	12-17	6
7	150-186	26-34	7-12
8	393-486	52-81	13-27
9	1048-1356	128-219	25-54
10	2818-3645	323-558	57-108
11	7767-9477	729	115-729
12	21395-27702	1919-2187	282-729
13	59049	5062-6561	609-1215

Látható, hogy elég kevés konkrét eredmény ismert. Az alábbi kérdés az egyik pontos eredményre kérdez rá.

Mutassuk meg, hogy a 13 mérkzésbl álló totón legalább 59049 szelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy biztosan elérjünk legalább 12 találatot!

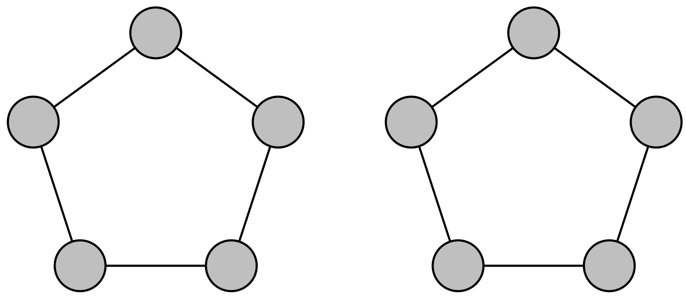
11.5. A budapesti telefonszámok hétjegyek. Sokszor elfordul, hogy valaki két szomszédos számot felcserél, ezért téves a hívása. Keress minél egyszerbb eljárást arra, hogy a hétjegy számok végére még egy ellenrz számot téve, a központ számcsere (két szomszédos felcserélése) esetén jelezni tudja, hogy a szám téves, és ne kapcsoljon!

FPI tehetséggondozó szakkör 9. évf. XII. foglalkozás, 2010. december 15.

12.1. *Dobos Sándor javaslata*

Figyelem, figyelem!!! Itt az új szerencsejáték!

Jelöljön be mindkét ötszögön egy-egy csúcsot. Kisorsolnak majd ötszögenként egy-egy csúcsot. A fnyeremény azé, aki eltalálja mindkettt, vagy majdnem. Ez utóbbi esetben az egyiket el kell találni, a másikon pedig a bejelölt meznek és a kisorsoltnak szomszédosnak kell lennie. Hány szelvényt töltsünk ki, hogy biztos mienk legyen a fnyeremény?



12.2. *Dobos Sándor javaslata*

Bergengócia rendrfnöke a titkos akció három változatára készítette fel embereit. Ezek fedneve: HANDABANDA, RONDAGOMBA, BAMBABOLHA. A központ egy sms üzenetben jelzi, mely terv lép életbe. A rendrfnök gondolt arra, hogy a központ ügyeletese nagy izgalmában esetleg n bett rosszul írhat s erre felhívta embereinek figyelmét is. Legfeljebb hány hibára számított a fnök? Megadhatott volna rövidebb fedneveket?

12.3. *Dienes Zoltán feladata*

Hanyag Hugó az 1, 2, 3, ..., 16 számok egyikére gondolt. Egy-egy cetlire kell fölírni kérdéseinket, s mind odaadni neki, majd amikor ráér egyszerre mindegyikre válaszol fog. De lehet rá számítani, hogy az egyik választ elveszti mieltt az eljutna hozzánk. Legalább hány kérdésre van így szükség ahhoz, hogy kitaláljuk a gondolt számot?

10.3. Egy cég 5 szériában gyártott súlyokat. Az egyes szériákon belül mindegyik súly egyforma tömeg, de nem ismert, hogy mekkorák. Az éppen távol lev cégvezet meg szeretné tudni, hogy milyen tömeg súlyokat gyártottak. Ezért egy mérési rlapot küld egyik alkalmazottjának, majd annak kell elvégeznie a méréseket, és visszaküldeni az eredményekkel kitöltött rlapot.

Legalább hány mérést kell elvégezni, és mik legyenek ezek a mérések (hogyan töltse ki a cégvezet az 1., 2., ..., 5. oszlopokat), ha várható, hogy (legfeljebb) egyszer az alkalmazott hibás értéket ír be a „Mért tömeg” rovatba?

Az rlap így néz ki:

	Hány súly legyen az egyes szériákból a mérlegen?					Mért tömeg
	1. széria	2. széria	3. széria	4. széria	5. széria	(kg)
1. mérés						
2. mérés						
3. mérés						
4. mérés						
5. mérés						
6. mérés						
7. mérés						
8. mérés						
9. mérés						
10. mérés						
11. mérés						

10.5. Bergengóciában a totó, a bajnokságnak megfelelen csak 4 mérkzést tartalmaz. Minden mérkzés eredményére háromféleképpen lehet tippelni: 1-gyel, 2-vel vagy X-szel. Egy szelvényen csak egy tipposzlop van.

a) Hány szelvényt kell venni ahhoz, hogy biztosan legyen telitalálatunk?
b) És ahhoz, hogy biztosan legyen olyan szelvényünk, amely legalább 3 találatos?

11.3. Keress háromféle bet alkalmazásával minél több szóból álló négybets
a) 1-hibajelz kódot!
b) 1-hibajavító kódot!

11.4. A szenvedélyes játékosok már régóta keresik az olyan nyeresélyes tipprendszereket, úgynevezett totókulcsokat, mint amilyet az 10.5. feladatban is kerestünk. Mégis, már „kicsinek” tn esetekben sem ismeretes, hogy legkevesebb hány szelvény kell bizonyos számú találat eléréséhez.

Az alábbi táblázat mutatja, hogy mit tudott a világ 1995-ben. n a mérkzések számát jelöli, r pedig azt mutatja, hogy legfeljebb hány találatot engedünk ki a kezünkbl. Az 5.6 feladat az $n = 4$, $r = 1$ esetnek felel meg.

n/r	**1**	**2**	**3**
1	1		
2	3	1	
3	5	3	1
4	9	3	3
5	27	8	3
6	63-73	12-17	6
7	150-186	26-34	7-12
8	393-486	52-81	13-27
9	1048-1356	128-219	25-54
10	2818-3645	323-558	57-108
11	7767-9477	729	115-729
12	21395-27702	1919-2187	282-729
13	59049	5062-6561	609-1215

Látható, hogy elég kevés konkrét eredmény ismert. Az alábbi kérdés az egyik pontos eredményre kérdez rá.

Mutassuk meg, hogy a 13 mérkzésbl álló totón legalább 59049 szelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy biztosan elérjünk legalább 12 találatot!

11.5. A budapesti telefonszámok hétjegyek. Sokszor elfordul, hogy valaki két szomszédos számot felcserél, ezért téves a hívása. Keress minél egyszerbb eljárást arra, hogy a hétjegy számok végére még egy ellenrz számot téve, a központ számcsere (két szomszédos felcserélése) esetén jelezni tudja, hogy a szám téves, és ne kapcsoljon!

FPI tehetséggondozó szakkör 9. évf. XIII. foglalkozás, 2011. január 5.

Az elz feladatsorokból elmaradt példákon kívül az alábbi feladatokkal foglalkozunk:

13.1. Hány négyzetszám van az 1, 2, …, 2011 számok között?

13.2. Megválaszthatók-e úgy az eljelek, hogy teljesüljön az

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm \ldots \pm 2009 \pm 2010 \pm 2011 = 2011$$

összefüggés?

13.3. Legalább hány pont esetén fordulhat az el, hogy ha behúzzuk mindegyik kett összeköt egyenesét, akkor összesen épp 2011 egyenest kapunk?

13.4. **a)** Melyik az a legnagyobb ketthatvány, amely osztja 2011!-t?
b) Hány 0-ra végzdik 2011!?

13.5. Két 2011 mm sugarú kör a T pontban érinti egymást. Az egyikre illetve a másikra illeszked A, B pontokra $ATB\angle = 90°$. Milyen hosszú az AB szakasz?

13.6. Állítsuk el a 2011-et minél kevesebb négyzetszám összegeként!

13.7. Egy 4×4-es táblázatban 16 szám volt. Az ábrán látható táblázatot úgy kaptuk az eredetibl, hogy egy lépésben egyszerre minden számot helyettesítettünk a sorában és oszlopában álló másik hat szám számtani közepével. Hogyan volt kitöltve az eredeti táblázat?

2	0	0	0
0	0	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

FPI tehetséggondozó szakkör 9. évf. XIV. foglalkozás, 2011. január 12.

Korábban volt:
13.6. Állítsuk el a 2011-et minél kevesebb négyzetszám összegeként!

13.7. Egy 4×4-es táblázatban 16 szám volt. Az ábrán látható táblázatot úgy kaptuk az eredetibl, hogy egy lépésben egyszerre minden számot helyettesítettünk a sorában és oszlopában álló másik hat szám számtani közepével. Hogyan volt kitöltve az eredeti táblázat?

2	0	0	0
0	0	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

10.3. Egy cég 5 szériában gyártott súlyokat. Az egyes szériákon belül mindegyik súly egyforma tömeg, de nem ismert, hogy mekkorák. Az éppen távol lev cégvezet meg szeretné tudni, hogy milyen tömeg súlyokat gyártottak. Ezért egy mérési rlapot küld egyik alkalmazottjának, majd annak kell elvégeznie a méréseket, és visszaküldeni az eredményekkel kitöltött rlapot.

Legalább hány mérést kell elvégezni, és mik legyenek ezek a mérések (hogyan töltse ki a cégvezet az 1., 2., ..., 5. oszlopokat), ha várható, hogy (legfeljebb) egyszer az alkalmazott hibás értéket ír be a „Mért tömeg” rovatba?

Az rlap így néz ki:

	Hány súly legyen az egyes szériákból a mérlegen?					Mért tömeg
	1. széria	2. széria	3. széria	4. széria	5. széria	(kg)
1. mérés						
2. mérés						
3. mérés						
4. mérés						
5. mérés						
6. mérés						
7. mérés						
8. mérés						
9. mérés						
10. mérés						
11. mérés						

10.5. Bergengóciában a totó, a bajnokságnak megfelelen csak 4 mérkzést tartalmaz. Minden mérkzés eredményére háromféleképpen lehet tippelni: 1-gyel, 2-vel vagy X-szel. Egy szelvényen csak egy tipposzlop van.

a) Hány szelvényt kell venni ahhoz, hogy biztosan legyen telitalálatunk?
b) És ahhoz, hogy biztosan legyen olyan szelvényünk, amely legalább 3 találatos?

12.3. *Dienes Zoltán feladata*

Hanyag Hugó az 1, 2, 3, ..., 16 számok egyikére gondolt. Egy-egy cetlire kell fölírni kérdéseinket, s mind odaadni neki, majd amikor ráér egyszerre mindegyikre válaszol fog. De lehet rá számítani, hogy az egyik választ elveszti mieltt az eljutna hozzánk. Legalább hány kérdésre van így szükség ahhoz, hogy kitaláljuk a gondolt számot?

11.5. A budapesti telefonszámok hétjegyek. Sokszor elfordul, hogy valaki két szomszédos számot felcserél, ezért téves a hívása. Keress minél egyszerbb eljárást arra, hogy a hétjegy számok végére még egy ellenrz számot téve, a központ számcsere (két szomszédos felcserélése) esetén jelezni tudja, hogy a szám téves, és ne kapcsoljon!

11.4. A szenvedélyes játékosok már régóta keresik az olyan nyeresélyes tipprendszereket, úgynevezett totókulcsokat, mint amilyet az 10.5. feladatban is kerestünk. Mégis, már „kicsinek” tn esetekben sem ismeretes, hogy legkevesebb hány szelvény kell bizonyos számú találat eléréséhez.

Az alábbi táblázat mutatja, hogy mit tudott a világ 1995-ben. n a mérkzések számát jelöli, r pedig azt mutatja, hogy legfeljebb hány találatot engedünk ki a kezünkbl. Az 5.6 feladat az $n = 4$, $r = 1$ esetnek felel meg.

n/r	**1**	**2**	**3**
1	1		
2	3	1	
3	5	3	1
4	9	3	3
5	27	8	3
6	63-73	12-17	6
7	150-186	26-34	7-12
8	393-486	52-81	13-27
9	1048-1356	128-219	25-54
10	2818-3645	323-558	57-108
11	7767-9477	729	115-729
12	21395-27702	1919-2187	282-729
13	59049	5062-6561	609-1215

Látható, hogy elég kevés konkrét eredmény ismert. Az alábbi kérdés az egyik pontos eredményre kérdez rá.

Mutassuk meg, hogy a 13 mérkzésbl álló totón legalább 59049 szelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy biztosan elérjünk legalább 12 találatot!

11.3. Keress háromféle bet alkalmazásával minél több szóból álló négybets
a) 1-hibajelz kódot!
b) 1-hibajavító kódot!

14.1. Igaz-e, hogy az

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot 2007 \cdot 2009 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2008 \cdot 2010$$

szorzatösszeg osztható 2011-gyel?

14.2. Van-e 2011 db olyan nem feltétlenül különböz szám, amelyek összege megegyezik a szorzatukkal?

FPI tehetséggondozó szakkör 9. évf. XV. foglalkozás, 2011. január 19.

14.1. Igaz-e, hogy az

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2007 \cdot 2009 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2008 \cdot 2010$$

szorzatösszeg osztható 2011-gyel?

14.2. Van-e 2011 db olyan nem feltétlenül különböz szám, amelyek összege megegyezik a szorzatukkal?

15.1. Az ISBN kód felépítése, a hibajelz „digit". Írd ki sok könyv ISBN számát. Próbáld kitalálni hogy képzik az utolsó karaktert, amellyel bármely két jel felscerélése, vagy bármelyik elötése észlelhet!

12.3. *Dienes Zoltán feladata*
Hanyag Hugó az 1, 2, 3, ..., 16 számok egyikére gondolt. Egy-egy cetlire kell fölírni kérdéseinket, s mind odaadni neki, majd amikor ráér egyszerre mindegyikre válaszol fog. De lehet rá számítani, hogy az egyik választ elveszti mieltt az eljutna hozzánk. Legalább hány kérdésre van így szükség ahhoz, hogy kitaláljuk a gondolt számot?

11.4. Mutassuk meg, hogy a 13 mérkzésbl álló totón legalább 59049 szelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy biztosan elérjünk legalább 12 találatot!

Az 1995/96. évi Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny feladatai
KEZDK, Második forduló

1. A k egész paraméter milyen értékei esetén van legalább egy olyan $(x; y)$ pozitív egészekbl álló számpár, amely kielégíti a következ egyenletet:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{y}\right) = k$$

Határozza meg az egyenlet pozitív egész számpárokból álló megoldásait!

2. Bizonyítsa be, hogy ha a, b pozitív valós számok és c tetszleges valós szám, akkor

$$a + 4b + 4c^2 \geq 6 + 5c - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\ .$$

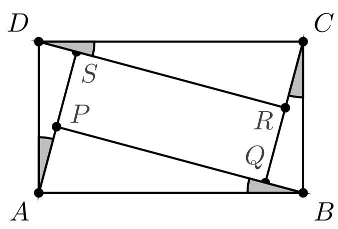
(VIGYÁZAT, EZ A FELADAT HIBÁS!)

3. Legyen az ABC egyenl szárú háromszög AC szárának egy pontja P! Mérjük fel B-bl a PA szakaszt a CB szár B-n túli meghosszabbítására, és jelöljük a kapott pontot Q-val! Mi a PQ szakaszok felezpontjainak halmaza, ha P befutja az AC szakaszt?

Az 1996/97. évi Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny feladatai
KEZDK, Második forduló

1. Oldja meg az egész számpárok halmazán az alábbi egyenletet: $x^3 - y^3 = 91$.

2. Az $ABCD$ téglalap két szomszédos oldala 30 cm és 50 cm. Határozza meg a $PQRS$ négyszög területét, ha az ábrán szürkével jelölt szögek 15°-osak!



3. A tízes számrendszerben hány olyan 6-tal osztható n jegy szám ($n \in \mathbb{N}^+$ és $n > 2$) van, amelyre teljesül, hogy a számjegyeinek összege megegyezik azzal az $(n-1)$ jegy számmal, amelyet belle a legmagasabb helyiérték helyen álló számjegyének elhagyásával kapunk?

FPI tehetséggondozó szakkör 9. évf. XVI. foglalkozás, 2011. január 26.

Arany Dániel Matematika Tanulóverseny 2006/2007, 2. kat., 9. évf., II. forduló

1. feladat

Hány olyan négyjegy egész szám van a tízes számrendszerben, amelyben szerepel a 0 és az 1 számjegy is?

2. feladat

Melyek azok a nem negatív x, y, és z egész számok, melyekre teljesül, hogy:

$$(x+y+z)^2+(x+y-z)^2+(x-y+z)^2=40.$$

3. feladat

Egy szabályos ötszög kerülete 10 egység. Jelölje AT az egyik szimmetriatengelyének az ötszögbe es szakaszát, h az AT, R a köré írt és r a beleírt kör sugarának hosszát! Igazolja, hogy:

$$\frac{1}{h}=R-r.$$

4. feladat

Egy királyi palota alaprajza látható az alábbi ábrán. Tíz évvel ezeltt az ábrán feltüntetett ajtók egyikét befalazták, ezt a változtatást tehát az ábra nem tükrözi. Három éve a király minden reggel bemegy a palotába a nyíllal megjelölt bejáraton, majd úgy sétál a termek között, hogy minden ajtón pontosan egyszer menjen keresztül. Végül leül a trónteremben és fogadja látogatóit.

a) Melyik ajtót falazták be?

b) Melyik terem a trónterem?

5. feladat

Az $ABCD$ konvex négyszöget AC átlójával felbontjuk két háromszögre. Bizonyítsa be, hogy ha az így keletkezett ABC és ADC háromszögek beírt körei érintik egymást, akkor az ABD és BCD háromszögek beírt körei is érintik egymást.

Arany Dániel Matematika Tanulóverseny 2007/2008, 2. kat., 9. évf., II. forduló

1. feladat

23 diák írt meg egy dolgozatot, az átlag (két tizedes jegyre kerekítve) 2,74 lett. Lehet-e kevesebb, mint két elégtelen, ha tudjuk, hogy nyolc jeles volt?

2. feladat

Egy derékszög háromszög átfogója 13 cm és a befogóinak összege 17 cm. A háromszög mindhárom oldalára kifelé négyzeteket rajzolunk. Így a háromszög csúcsain kívül hat pontot kapunk. Mekkora az ezek által meghatározott hatszög területe?

3. feladat

Egy 8 fs társaság olyan kártyajátékot játszik, amelyet 4-en kell az óramutató járásával ellentétes irányba játszani. Mindig két négyes csoportban játszanak. Elhatározzák, hogy az összes lehetséges összetételben fognak játszani. (Két összetétel akkor különböz, ha a két 4-es csoport közül legalább az egyikben van olyan játékos, aki után másik játékos következik az egyik összetételben, mint a másikban.) Kb. hány év alatt tudják teljesíteni elhatározásukat, ha hetente egy összetételben játszanak?

4. feladat

Egy kékre befestett téglatest élei cm-ben mérve természetes számok és az egyik él hossza 7 cm. A téglatestet a lapjaival párhuzamos síkokkal 1 cm él kis kockákra szétvágva a kék lappal nem rendelkez kis kockák száma feleakkora, mint az összes kis kockák száma. Mennyi az ilyen tulajdonságú téglatestek közül a legkisebb térfogatúnak a térfogata?

5. feladat

Az a, b, c és d valós számokra teljesül, hogy $a^2+b^2=c^2+d^2$ és $ac+bd=0$. Mennyi lehet az $ab+cd$ értéke?

FPI tehetséggondozó szakkör 9. évf. XVII. foglalkozás, 2011. február 2.

Arany Dániel Matematika Tanulóverseny 2006/2007, 2. kat., 9. évf., II. forduló

1. feladat

Hány olyan négyjegy egész szám van a tízes számrendszerben, amelyben szerepel a 0 és az 1 számjegy is?

2. feladat

Melyek azok a nem negatív x, y, és z egész számok, melyekre teljesül, hogy:

$$(x+y+z)^2+(x+y-z)^2+(x-y+z)^2=40.$$

3. feladat

Egy szabályos ötszög kerülete 10 egység. Jelölje AT az egyik szimmetriatengelyének az ötszögbe es szakaszát, h az AT, R a köré írt és r a beleírt kör sugarának hosszát! Igazolja, hogy:

$$\frac{1}{h}=R-r.$$

4. feladat

Egy királyi palota alaprajza látható az alábbi ábrán. Tíz évvel ezeltt az ábrán feltüntetett ajtók egyikét befalazták, ezt a változtatást tehát az ábra nem tükrözi. Három éve a király minden reggel bemegy a palotába a nyíllal megjelölt bejáraton, majd úgy sétál a termek között, hogy minden ajtón pontosan egyszer menjen keresztül. Végül leül a trónteremben és fogadja látogatóit.

a) Melyik ajtót falazták be?

b) Melyik terem a trónterem?

5. feladat

Az $ABCD$ konvex négyszöget AC átlójával felbontjuk két háromszögre. Bizonyítsa be, hogy ha az így keletkezett ABC és ADC háromszögek beírt körei érintik egymást, akkor az ABD és BCD háromszögek beírt körei is érintik egymást.

Arany Dániel Matematika Tanulóverseny 2007/2008, 2. kat., 9. évf., II. forduló

1. feladat

23 diák írt meg egy dolgozatot, az átlag (két tizedes jegyre kerekítve) 2,74 lett. Lehet-e kevesebb, mint két elégtelen, ha tudjuk, hogy nyolc jeles volt?

2. feladat

Egy derékszög háromszög átfogója 13 cm és a befogóinak összege 17 cm. A háromszög mindhárom oldalára kifelé négyzeteket rajzolunk. Így a háromszög csúcsain kívül hat pontot kapunk. Mekkora az ezek által meghatározott hatszög területe?

3. feladat

Egy 8 fs társaság olyan kártyajátékot játszik, amelyet 4-en kell az óramutató járásával ellentétes irányba játszani. Mindig két négyes csoportban játszanak. Elhatározzák, hogy az összes lehetséges összetételben fognak játszani. (Két összetétel akkor különböz, ha a két 4-es csoport közül legalább az egyikben van olyan játékos, aki után másik játékos következik az egyik összetételben, mint a másikban.) Kb. hány év alatt tudják teljesíteni elhatározásukat, ha hetente egy összetételben játszanak?

4. feladat

Egy kékre befestett téglatest élei cm-ben mérve természetes számok és az egyik él hossza 7 cm. A téglatestet a lapjaival párhuzamos síkokkal 1 cm él kis kockákra szétvágva a kék lappal nem rendelkez kis kockák száma feleakkora, mint az összes kis kockák száma. Mennyi az ilyen tulajdonságú téglatestek közül a legkisebb térfogatúnak a térfogata?

5. feladat

Az a, b, c és d valós számokra teljesül, hogy $a^2+b^2=c^2+d^2$ és $ac+bd=0$. Mennyi lehet az $ab+cd$ értéke?

Arany Dániel Matematika Tanulóverseny 2008/2009, 2. kategória, 9. évfolyam, II. forduló

1. feladat
Mely x és y egész számokra igaz, hogy $x^2 + yx = 36$ és $y^2 + yx = 45$?

2. feladat
Egy 8 cm oldalú négyzet síkjában lév P pont a négyzet mind a négy csúcsától legfeljebb 8 cm távolságra van. Igazolja, hogy P a négyzet minden oldalától legalább 1 cm távolságra van!

3. feladat
Melyek azok a pozitív egész számok, amelyeknek pontosan négy (pozitív) osztója van és az osztóik összege 108?

4. feladat
Adott egy háromszög, melybe rajzolható három kör, melyek egymást kívülrl érintik és mindegyik kör a háromszög oldalai közül pontosan kettt érint. Mutassa meg, hogy a körök bels közös érintegyenesei egy pontban metszik egymást!

5. feladat
Julcsi ebben a félévben matematikából csak négyes és ötös osztályzatot kapott. Négyesbl 4 darabot és ötösbl 5 darabot. Hányféle sorrendben kaphatta ezt a 9 darab osztályzatot, ha soha nem kapott egymás után kett darabnál több négyes osztályzatot?

Megoldások

Arany Dániel Matematika Tanulóverseny 2006/2007, 2. kat., 9. évf., II. forduló

1. feladat

Hány olyan négyjegy egész szám van a tízes számrendszerben, amelyben szerepel a 0 és az 1 számjegy is?

Megoldás

Rajzoljunk halmazábrát az alábbi halmazokkal:

A alaphalmaz: a négyjegy számok halmaza;

B halmaz: a 0 számjegyet *nem* tartalmazó négyjegy számok halmaza;

C halmaz: az 1 számjegyet *nem* tartalmazó négyjegy számok halmaza;

$B \cap C$ halmaz: a 0 és az 1 számjegyet *sem* tartalmazó négyjegy számok halmaza;

E halmazok elemszámai: $|A| = 9 \cdot 10^3$, $|B| = 9^4$, $|C| = 8 \cdot 9^3$, $|B \cap C| = 8^4$. A kérdéses halmaz elemszáma:

$$|A| - |B| - |C| + |B \cap C| = 703.$$

2. feladat

Melyek azok a nem negatív x, y, és z egész számok, melyekre teljesül, hogy:

$$(x + y + z)^2 + (x + y - z)^2 + (x - y + z)^2 = 40.$$

Megoldás A 40 elállítása három négyzetszámmal: $6^2 + 2^2 + 0^2$ Az $(x+y+z)$, $(x+y-z)$, $(x-y+z)$ számok csak ± 6, ± 2 és 0 lehetnek valamilyen sorrendben.

$(x + y + z)$ pozitív és közülük a legnagyobb, $(x + y - z) + (x - y + z) = 2x$ nemnegatív. Ezeket is figyelembe véve csak $(x + y + z) = 6$ marad és $(x + y - z)$, $(x - y + z)$ egyike 2, a másik 0, amibl $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ vagy $x = 1$, $y = 3$, $z = 2$.

3. feladat

Egy szabályos ötszög kerülete 10 egység. Jelölje AT az egyik szimmetriatengelyének az ötszögbe es szakaszát, h az AT, R a köré írt és r a beleírt kör sugarának hosszát! Igazolja, hogy:

$$\frac{1}{h} = R - r.$$

Megoldás

Mivel $h = R + r$ és $R^2 - r^2 = 1$, így $1 = R^2 - r^2 = (R+r)(R-r) = h(R-r)$, amibl adódik az állítás.

4. feladat

Egy királyi palota alaprajza látható az alábbi ábrán. Tíz évvel ezeltt az ábrán feltüntetett ajtók egyikét befalazták, ezt a változtatást tehát az ábra nem tükrözi. Három éve a király minden reggel bemegy a palotába a nyíllal megjelölt bejáraton, majd úgy sétál a termek között, hogy minden ajtón pontosan egyszer menjen keresztül. Végül leül a trónteremben és fogadja látogatóit.

a) Melyik ajtót falazták be?

b) Melyik terem a trónterem?

Megoldás

Ha a fbejáratot elfelejtjük (azon már bejöttünk), akkor két ké tszomszédos szobának van páratlan ajtaja a többinek páros van. Ha egy szobába mindig csak bemegyünk és ki is megyünk, akkor páros sok ajtaját használjuk. Így csak a kezdszobának és még egynek lehet páratéan sok ajtaja.

Most a kezdnek, egy szomszédjának és még két másik egymással szomszédos szobának van páratlan sok ajtaja. Tehát ez utóbbi kett közti ajtót falazták be és a bejárati szoba páratlan ajtós szomszédja a trónterem. Így meg is lehet csinálni abejárást, tessék lerajzolni.

5. feladat

Az $ABCD$ konvex négyszöget AC átlójával felbontjuk két háromszögre. Bizonyítsa be, hogy ha az így keletkezett ABC és ADC háromszögek beírt körei érintik egymást, akkor az ABD és BCD háromszögek beírt körei is érintik egymást.

Megoldás

Ismeretes, hogy az ABC háromszög A csúcsából a beírt körhöz húzott érint hossza $s-a=\frac{-a+b+c}{2}$.
Az ABC, ACD háromszöge kbeírt körei pontosan akkor érintik egymást, ha A-ból e körökhöz egyenl hosszú érintk húzhatók (az AC átlón). Ezt felírva azt kapjuk, hogy $AB+CD=BC+DA$. Pontosan ugyanezt az összefüggést kapjuk, ha a másik átlót húzzuk be.

Arany Dániel Matematika Tanulóverseny 2007/2008, 2. kat., 9. évf., II. forduló

1. feladat
23 diák írt meg egy dolgozatot, az átlag (két tizedes jegyre kerekítve) 2,74 lett. Lehet-e kevesebb, mint két elégtelen, ha tudjuk, hogy nyolc jeles volt?

Megoldás A jegyek összege kb $23\cdot 2,74\approx 63$. A nyolc jeles ebbe 40-et ad, még 23 jön a maradék 15 jegybl. Ez lehet nyolc 2-es és hét 1-es, de hétnél kevesebb egyessel a legkisebb összeg már $6\cdot 1+9\cdot 2=24$. Tehát legalább hét elégtelen volt a jegyek között.

2. feladat
Egy derékszög háromszög átfogója 13 cm és a befogóinak összege 17 cm. A háromszög mindhárom oldalára kifelé négyzeteket rajzolunk. Így a háromszög csúcsain kívül hat pontot kapunk. Mekkora az ezek által meghatározott hatszög területe?

Megoldás
A hatszög a három négyzeten kívül négy háromszögbl áll. Ezek mindegyikének ugyanakkora a területe. Ha a széls háromszögeket összehasonlítjuk a középsvel, akkor két két azonos oldalt látunk és az általuk bezárt szög egymást 180°-ra egészíti ki (a,b,γ), $(a,b,180^\circ-\gamma)$. Ilyen háromszögek területe egyenl. Ha ugyanis az a alapra rajzoljuk mindkettt, hogy ezen még C csúcsuk is egybeessen, akkor b oldaluk innen indul ki és az a-ra C-ben állított egyenesre szimmetrikus lesz, a za-hoz tartozó magasság egyenlnek adódik.

3. feladat
Egy 8 fs társaság olyan kártyajátékot játszik, amelyet 4-en kell az óramutató járásával ellentétes irányba játszani. Mindig két négyes csoportban játszanak. Elhatározzák, hogy az összes lehetséges összetételben fognak játszani. (Két összetétel akkor különböz, ha a két 4-es csoport közül legalább az egyikben van olyan játékos, aki után másik játékos következik az egyik összetételben, mint a másikban.) Kb. hány év alatt tudják teljesíteni elhatározásukat, ha hetente egy összetételben játszanak?

I. megoldás

$$\frac{\binom{8}{4}}{2}\cdot 3!^2$$

hétig, hiszen a két csoport $\frac{\binom{8}{4}}{2}$-féleképpen hozható létre egy-egy csoporton belül a sorrend 3!-féle lehet.

II. megoldás
$(7\cdot 6\cdot 5)\cdot 3\cdot 2\cdot 1=1260$ hétig hiszen Kis Pista Jóska után 7, azután 6, azután 5 ember következhet, a maradékok közül a legmagasabb után csak 3, amögött csak 2 ember valamelyike lehet, végül az utolsó már egyértelmen adódik.

4. feladat
Egy kékre befestett téglatest élei cm-ben mérve természetes számok és az egyik él hossza 7 cm. A téglatestet a lapjaival párhuzamos síkokkal 1 cm él kis kockákra szétvágva a kék lappal nem rendelkez kis kockák száma feleakkora, mint az összes kis kockák száma. Mennyi az ilyen tulajdonságú téglatestek közül a legkisebb térfogatúnak a térfogata?

Megoldás
Ha a másik két és a és b, akkor a

$$7ab=2\cdot(7-2)(a-2)(b-2)$$

egyenletet kell megoldanunk a pozitív egészek körében. Ennek kezelésére többféle eljárást is adunk.

I. eljárás

$$0 = 3ab - 20a - 20b + 40.$$

Szeretnénk szorzattá alakítani: $(?a\dots)(?b\dots)$ az egyenlet szimmetrikus, de 3-at nem tudunk egészekkel szimmetrikusan megosztani. Szorozzuk az eredeti egyenletet hárommal!

$$0 = 9ab - 60a - 60b + 120.$$

$$280 = (3a - 20)(3b - 20)$$

A jobb oldali két tényez hármas maradéka 1. Az a, b ismeretlenek értéke legalább 3, így $(3a - 20)$ és $(3b - 20)$ legalább (-11) így nem lehet mindkett negatív, hanem mindkett pozitív. A lehetségek táblázatban:

$(3a-20)$	$(3b-20)$	a	b	ab
1	280	7	100	700
4	70	6	30	180
7	40	9	20	180
10	28	10	16	160

A további esetek a két tényez felcserélésével, egyben a és b cseréjével adódnak.

A térfogat tehát az utolsó esetben, $a = 10$, $b = 16$ esetén a legkisebb, amikor $V = 7 \cdot 10 \cdot 16 = 1120^3$.

II. eljárás

Fejezzük ki az egyik ismeretlent a másikkal!

$$60b - 120 = 9ab - 60a.$$

$$60b - 120 = 3a(3b - 20).$$

$$3a = \frac{60b - 120}{3b - 20} = \frac{20(3b - 20) + 280}{3b - 20a} = 20 + \frac{280}{3b - 20a}.$$

Tehát az kell, hogy $3b - 20a$ a 280 osztója legyen ..., lásd az I. megoldást.

III. eljárás Ha

$$7ab = 10(a - 2)(b - 2),$$

akkor

$$\frac{7}{10} = (1 - \frac{2}{a})(1 - -\frac{2}{b}).$$

Az $(1 - \frac{2}{a})$, $(1 - \frac{2}{b})$ tényezk egyike legalább $\sqrt{\frac{7}{10}} =\approx 0,83666$, a másik pedig legfeljebb ennyi. Mivel $1 - \frac{2}{13} \approx 0,846 > \sqrt{\frac{7}{10}}$ így a és b közül a kisebbik legfeljebb 12. Ezt a kevés esetet könny végignézni...

5. feladat

Az a, b, c és d valós számokra teljesül, hogy $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ és $ac + bd = 0$. Mennyi lehet az $ab + cd$ értéke?

I. eljárás

Mindig 0.

Geometriai megközelítés. Ha $\sqrt{a^2 + b^2} = e$, akkor az $|a|$, $|b|$, e és a $|c|$, $|d|$, e oldalú háromszöge kderékszögek. Ráadásul $ac + bd = 0$-ból $\frac{|a|}{|b|} = \frac{|d|}{|c|}$, így hasonlóak is, de átfogójuk egyenl, így egybevágóak: $|a| = |d|$ és $|b| = |c|$. Innen az eljeleket is figyelembe véve adódik az eredmény.

II. eljárás

Ha $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$-ben $|a| < |d|$, akkor itt $|b| > |c|$. Ez ellentmond $|ac| = |bd|$-nak. Ugyaezt az ellentmondást kapjuk az $|a| > |d|$ feltételbl...

Arany Dániel Matematika Tanulóverseny 2008/2009, 2. kategória, 9. évfolyam, II. forduló

1. feladat

Mely x és y egész számokra igaz, hogy $x^2 + yx = 36$ és $y^2 + yx = 45$?

Megoldás

A két egyenlet összegébl $(x + y)^2 = 81$, azaz $(x + y) = \pm 9$. az els egyenletbl $x = \frac{36}{x+y}$, a másodikból $y = \frac{45}{x+y}$. . . .

2. feladat

Egy 8 cm oldalú négyzet síkjában lév P pont a négyzet mind a négy csúcsától legfeljebb 8 cm távolságra van. Igazolja, hogy P a négyzet minden oldalától legalább 1 cm távolságra van!

3. feladat

Melyek azok a pozitív egész számok, amelyeknek pontosan négy (pozitív) osztója van és az osztóik összege 108?

Megoldás

Az osztók számát a prímtényezs alakból így kaphatjuk meg: minden kitevt eggyel növelünk és a megnövelt kitevket összeszorozzuk.

Ez a szám tehát vagy két különböz prím szorzata $(p \cdot q)$ vagy egy prím köbe (p^3).

Az els esetben az osztók összege $1 + p + q + pq = (p + 1)(q + 1) = 108 = 2^2 \cdot 3^3$, amibl a prímek 5 és 17, a szám 85, A másodikban az összeg $1 + p + p^2 + p^3$, amely egyik prímre sem lesz 108.

4. feladat

Adott egy háromszög, melybe rajzolható három kör, melyek egymást kívülrl érintik és mindegyik kör a háromszög oldalai közül pontosan kettt érint. Mutassa meg, hogy a körök bels közös érintegyenesei egy pontban metszik egymást!

5. feladat

Julcsi ebben a félévben matematikából csak négyes és ötös osztályzatot kapott. Négyesbl 4 darabot és ötösbl 5 darabot. Hányféle sorrendben kaphatta ezt a 9 darab osztályzatot, ha soha nem kapott egymás után kett darabnál több négyes osztályzatot?

FPI tehetséggondozó szakkör 9. évf. XVIII. foglalkozás, 2011. február 9.

Arany Dániel Matematika Tanulóverseny 2006/2007, 2. kat., 9. évf., II. forduló

5. feladat

Az $ABCD$ konvex négyszöget AC átlójával felbontjuk két háromszögre. Bizonyítsa be, hogy ha az így keletkezett ABC és ADC háromszögek beírt körei érintik egymást, akkor az ABD és BCD háromszögek beírt körei is érintik egymást.

Arany Dániel Matematika Tanulóverseny 2007/2008, 2. kat., 9. évf., II. forduló

4. feladat

Egy kékre befestett téglatest élei cm-ben mérve természetes számok és az egyik él hossza 7 cm. A téglatestet a lapjaival párhuzamos síkokkal 1 cm él kis kockákra szétvágva a kék lappal nem rendelkez kis kockák száma feleakkora, mint az összes kis kockák száma. Mennyi az ilyen tulajdonságú téglatestek közül a legkisebb térfogatúnak a térfogata?

5. feladat

Az a, b, c és d valós számokra teljesül, hogy $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ és $ac + bd = 0$. Mennyi lehet az $ab + cd$ értéke?

Arany Dániel Matematika Tanulóverseny 2008/2009, 2. kategória, 9. évfolyam, II. forduló

1. feladat

Mely x és y egész számokra igaz, hogy $x^2 + yx = 36$ és $y^2 + yx = 45$?

2. feladat

Egy 8 cm oldalú négyzet síkjában lév P pont a négyzet mind a négy csúcsától legfeljebb 8 cm távolságra van. Igazolja, hogy P a négyzet minden oldalától legalább 1 cm távolságra van!

3. feladat

Melyek azok a pozitív egész számok, amelyeknek pontosan négy (pozitív) osztója van és az osztóik összege 108?

4. feladat

Adott egy háromszög, melybe rajzolható három kör, melyek egymást kívülrl érintik és mindegyik kör a háromszög oldalai közül pontosan kettt érint. Mutassa meg, hogy a körök bels közös érintegyenesei egy pontban metszik egymást!

5. feladat

Julcsi ebben a félévben matematikából csak négyes és ötös osztályzatot kapott. Négyesbl 4 darabot és ötösbl 5 darabot. Hányféle sorrendben kaphatta ezt a 9 darab osztályzatot, ha soha nem kapott egymás után kett darabnál több négyes osztályzatot?

Arany Dániel Matematika Tanulóverseny 2000/2001, 2. kategória, 9. évfolyam, II. forduló

1. feladat Oldja meg a valós számok halmazán a következ egyenletet:

$$\left\{\frac{1}{2}x\right\} = \frac{1}{16}x + \frac{1}{32}$$

ahol $\{z\}$ a z valós szám törtrészét jelenti!

2. feladat

Melyek azok az $(x; y)$ egész számokból álló számpárok, amelyekre teljesül az alábbi egyenlség:

$$5x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - 4y = 5?$$

3. feladat

Az ABC háromszög területe t, beírt körének sugara r. Az A csúcsból induló két oldalt és a beírt kört kívülrl érint kör sugara r_a, a B csúcsból induló két oldalt és a beírt kört kívülr?l érint kör sugara r_b, a C csúcsból induló két oldalt és a beírt kört kívülrl érint? kör sugara r_c. A beírt kör és a másik három kör közös bels? érintje egy-egy kis háromszöget vág le az ABC háromszögbl, amelyek területe rendre t_a, t_b, t_c. Igazolja, hogy

$$\frac{t_a}{r_a} + \frac{t_b}{r_b} + \frac{t_c}{r_c} = \frac{t}{r}.$$

18.0. A tízes számrendszerben hány olyan 6-tal osztható n jegy szám ($n \in \mathbb{N}^+$ és $n > 2$) van, amelyre teljesül, hogy a számjegyeinek összege megegyezik azzal az $(n-1)$ jegy számmal, amelyet belle a legmagasabb helyiérték helyen álló számjegyének elhagyásával kapunk?

18.1. Mekkora lehet egy derékszög háromszögben a beírható kör sugarának és az átfogóhoz tartozó magasságának a hányadosa?

18.2. Legyenek x, y, z 21-nél nem nagyobb pozitív valós számok, amelyek összege 48. Mekkora az $(x+4)(y+4)(z+4)$ szorzat legnagyobb és legkisebb értéke?

18.3. Az ABC háromszögben $CA = CB$. Vegyen fel a háromszög köré írható kör BC ívén egy tetszleges P pontot, és legyen a C-bl az AP-re bocsátott merleges talppontja T. Igazolja, hogy

$$\overline{AT} = \overline{TP} + \overline{PB}.$$

FPI tehetséggondozó szakkör 9. évf. XXI. foglalkozás, 2011. március 2.

21.1. Egy hajó és utasai, összesen 100 f, Ungabunga szigetén az emberevk fogságába esett. Tudják, hogy másnap reggel a kannibálok leültetik ket egymás mögé, és mindegyikük fejére egy-egy piros vagy kék sapkát húznak. Mindenki csak az összes eltte ül ember fején lév sapkát fogja látni, a sajátját és a mögötte ülkét nem. A leghátsó embertl kezdve sorban mindenki hangosan mondhat majd egy színt: pirosat vagy kéket. A végén azt engedik szabadon, aki saját sapkája színét mondta, aki nem találta el, azt bizony megeszik. A kannibálok szigorúak, ha bárki mást tesz, minthogy a lehet legegyszerbben kimondja a "piros" vagy a "kék" szót, akkor senkinek sem kegyelmeznek. A foglyoknak még egy esélye van. Most este még összebeszélhetnek. Szeretnék, hogy minél többen megszabaduljanak. Hány fogoly tud biztosan megmenekülni?

Könnyítés: oldjuk meg elbb a feladatot abban az esetben, ha tudjuk, hogy összesen pontosan

a2) két;

a10) tíz;

piros sapka van a 100 között!

21.2. Keressük meg az olyan hatjegy négyzetszámokat, amelyeknek els három jegyét letörölve a szám négyzetgyökét kapjuk.

21.3. A szenvedélyes játékosok már régóta keresik a nyeresélyes tipprendszereket, az úgynevezett totókulcsokat. Mégis, már „kicsinek” tn esetekben sem ismeretes, hogy legkevesebb hány szelvény kell bizonyos számú találat eléréséhez.

Az alábbi táblázat mutatja, hogy mit tudott a világ 1995-ben. n a mérkzések számát jelöli, r pedig azt mutatja, hogy legfeljebb hány találatot engedünk ki a kezünkbl. Egy korábbi feladat az $n = 4$, $r = 1$ esetnek felel meg.

n/r	**1**	**2**	**3**
1	1		
2	3	1	
3	5	3	1
4	9	3	3
5	27	8	3
6	63-73	12-17	6
7	150-186	26-34	7-12
8	393-486	52-81	13-27
9	1048-1356	128-219	25-54
10	2818-3645	323-558	57-108
11	7767-9477	729	115-729
12	21395-27702	1919-2187	282-729
13	59049	5062-6561	609-1215

Látható, hogy elég kevés konkrét eredmény ismert. Az alábbi két kérdés egy-egy pontos eredményre kérdez rá.

a) Mutassuk meg, hogy a 13 mérkzésbl álló totón legalább 59049 szelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy biztosan elérjünk legalább 12 találatot!

b) Mutassuk meg, hogy a 11 mérkzésbl álló totón legalább 729 szelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy biztosan elérjünk legalább 9 találatot!

21.4. A budapesti telefonszámok hétjegyek. Sokszor elfordul, hogy valaki két szomszédos számot felcserél, ezért téves a hívása. Keress minél egyszerbb eljárást arra, hogy a hétjegy számok végére még egy ellenrz számot téve, a központ számcsere (két szomszédos felcserélése) esetén jelezni tudja, hogy a szám téves, és ne kapcsoljon!

21.5. Bizonyítsuk be, hogy ha k pozitív egész szám, akkor $k^3 + 2k^2 + 2k + 1$ nem négyzetszám.

21.6 Adott két közös kezdpontú, egymásra merleges szakasz. Mindkett hossza 2000 egység. Mindkét szakaszon adott 2001-2001 bels pont. Bizonyítsa be, hogy ebbl a 4002 pontból kiválasztható három, nem egy egyenesbe es pont úgy, hogy az általuk meghatározott háromszög területe legfeljebb 250 területegység!

21.7. Mekkora lehet egy derékszög háromszögben a beírható kör sugarának és az átfogóhoz tartozó magasságának a hányadosa?