1. feladatsor **2013.01.18.**

1. Legfeljebb hány számot lehet megadni úgy, hogy semelyik három megadott szám összege ne legyen osztható hárommal?

2. Pistike nem vigyáz a köpenyére. Az összesen csak 1 négyzetméternyi anyagra anyukája már 5 ízben varrt 30 négyzetdeciméteres foltot, hatszor pedig 20 négyzetdecimétereset. Biztosan igaz-e, hogy van két olyan folt, amelyek legalább 3 négyzetdeciméteres részen fedik egymást?

3. Oldd meg az alábbi egyenletet:

$$\frac{x-29}{2013}+\frac{x-27}{2015}=\frac{x-2013}{29}+\frac{x-2015}{27}.$$

4. Oszthatja-e négy körvonal 16 részre a síkot? (Például 2 körvonal oszthatja 4 részre a síkot.)

5. Egy táblán n darab szög van, és bármely kettő össze van kötve egy színes fonállal. A fonalak színe n-féle lehet. Akárhogy választunk ki három színt az n lehetséges szín közül, mindig találunk 3 darab szöget a táblán, melyeknél az összekötő fonalak színei között mind a három szín előfordul.

(a) Lehet-e $n=6$?

(b) Lehet-e $n=7$?

Beadási határidő: 2013.01.28. (Hétfő!)

2. feladatsor **2013.01.29.**

1. Egy úttörőpajtás az országúton sétált. Szembe jött vele egy kocsi, amelyen egy rendkívül hosszú épületfa volt. A kíváncsi és okos pajtás a következőképpen állapította meg az épületfa hosszát:

Egyenlő ütemben lépve a kocsi mellett, azzal egy irányba haladva (miközben a kocsi is haladt) lelépte a fa hosszát. Ez 112 lépés volt. Ezután az ellenkező irányba ment, és 16 lépés lett a mérés eredménye.

Milyen hosszú az épületfa, ha a pajtás egy-egy lépésének hossza 75 cm?

2. Keresd meg az összes olyan egészekből álló (x, y) számpárt, melyre teljesül, hogy

$$xy(x^2 - y^2) = 2925.$$

3. x olyan szám, melyre $x + \frac{1}{x} = 3$. Határozd meg $x^2 + \frac{1}{x^2}$ pontos értékét.

4. Szerkessz háromszöget körzővel és vonalzóval, ha meg van adva egy szöge (α), a szöggel szemközti oldala (a), és a másik két oldal különbsége ($b - c$). (Felteheted, hogy $b > c$.)

5. Legfeljebb hány számot lehet megadni úgy, hogy semelyik négy megadott szám összege ne legyen osztható néggyel?

Beadási határidő: 2013.02.04. (Hétfő!)

3. feladatsor **2013.02.05.**

1. Létezik-e három darab legalább 100-jegyű kettőhatvány (2^n alakú szám), melyek utolsó három számjegye megegyezik?

2. Az x számról tudjuk, hogy $x + \frac{1}{x} = 3$. Mennyi $x^3 + \frac{1}{x^3}$ és $x^4 + \frac{1}{x^4}$ értéke?

3. Egy matekversenyen három feladatot tűztek ki. 25 olyan tanuló volt, aki megoldott legalább egy feladatot. Azok között, akik az első feladatot nem tudták megoldani, kétszer annyian voltak olyanok, akik megoldották második feladatot, mint akik megoldották a harmadik feladatot. Csak az első feladatot eggyel többen oldották meg, mint ahányan a többiek voltak, akik szintén megoldották az első feladatot. A csupán egy feladatot megoldó tanulók fele nem tudta megoldani az első feladatot. Hány tanuló oldotta meg csak a második feladatot?

4. Egy egységnégyzet belsejében vagy határán (a zárt egységnégyzetlapon) elhelyezünk három pontot. Mutasd meg, hogy a kapott háromszög területe legfeljebb 1/2 területegység (vagy a pontok egy egyenesre esnek).

5. (a) Ki lehet-e színezni két színnel színezni a pozitív egész számokat úgy, hogy ne lehessen találni egyszínű a, b és c számokat, melyekre $a + b = c$?

(b) Ki lehet-e színezni két színnel színezni a pozitív egész számokat úgy, hogy ne lehessen találni egyszínű a, b és c számokat, melyek mind különböznek egymástól, és melyekre $a + b = c$?

Beadási határidő: 2013.02.11.

4. feladatsor **2013.02.19.**

1. Az ABC háromszögnek van egy $25°$-os és egy $75°$-os szöge. Fel lehet-e bontani a háromszöget két egyenlő szárú háromszögre?

2. Hányféleképpen szállhat be 9 ember három HÉV-kocsiba úgy, hogy minden kocsiba beszáll legalább egy ember?

3. Mennyi a kétezer darab 9-esből álló szám négyzetében a számjegyek összege? És a köbében?

4. Legyen $n = 2^{30} \cdot 3^{20}$. Hány olyan osztója van az n^2 számnak, amely kisebb, mint n?

5. Egy egységnégyzetlapon adott 9 pont, melyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre. Mutasd meg, hogy a 9 pont közül kiválasztható három, melyek által alkotott háromszög területe legfeljebb 1/8 területegység.

Beadási határidő: 2013.02.25.

5. feladatsor **2013.02.26.**

1. P az első 64 pozitív egész szám szorzata. Határozd meg a legnagyobb n értéket, melyre P osztható 12^n-nel.

2. Van-e olyan 10 tagú társaság, melyben pontosan 1 embernek van 1, pontosan 2 embernek van 2, pontosan 3 embernek van 3 és pontosan 4 embernek van 4 ismerőse? (Az ismerettség kölcsönös.)

3. Egy urnában piros és sárga golyók vannak. Ha egy piros golyót kiveszünk, az urnában maradt golyók hetede lesz piros, ha viszont öt sárgát veszünk ki, akkor a megmaradt golyók hatoda lesz piros. Hány piros és hány sárga golyó van az urnában?

4. Egy $30°$-os szögtartományban adott egy P pont a szög csúcsától 10 egység távolságra, Q és R pedig egy-egy pont a szög két szárán. Mennyi a PQR háromszög kerületének legkisebb lehetséges értéke?

5. Egy $n \times k$-s téglalap gyufaszálakból van kirakva (például egy 2×3-as téglalap 17 gyufaszálból van kirakva).

(a) n-nel és k-val kifejezve hány gyufaszálból áll az elrendezés?

(b) Egy lépésben el szabad venni két egymással érintkező, egymásra merőlegesen álló gyufát. Milyen n, k számpárok esetén lehet elvenni az összes gyufát?

Beadási határidő: 2013.03.05. (Kedd)

6. feladatsor **2013.03.06.**

1. Ha $x + y = 10$, akkor mennyi $x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy$ legnagyobb lehetséges értéke?

2. Az ABC háromszög szabályos, a háromszög oldala $5\,cm$. Legyen P a háromszög belső pontja. A P ponton keresztül húzzunk párhuzamost a háromszög oldalaival, ezek a háromszöglapot x, y és z hosszúságú szakaszokban metszik. Mennyi $x+y+z$ legnagyobb lehetséges hosszúsága (cm-ben)?

3. Néhány pozitív szám összege 1.

(a) Lehet-e a megadott számok négyzeteinek összege kisebb, mint 1/100?

(b) Lehet-e a megadott számok négyzeteinek összege nagyobb, mint 2?

4. A konvex $ABCDE$ ötszögben $AB = CD = EA = BC + DE = 1$ és $ABC\sphericalangle = DEA\sphericalangle = 90°$. Mekkora az $ABCDE$ ötszög területe?

5. Legyen O egy adott pontja a síknak. Létezik-e két konvex sokszög, A és B, melyekre teljesül, hogy az

(a) O-n átmenő egyenesek mindegyike legalább olyan hosszú szakaszban metszi A-t, mint B-t, de B területe legalább a duplája A területének?

(b) A és B sokszög tartalmazza O-t (a belsejében vagy a határán), az O-n átmenő egyenesek legfeljebb egy kivételével mind legalább olyan hosszú szakaszban metszik A-t, mint B-t, de B területe legalább a duplája A területének?

Beadási határidő: 2013.03.11. (Hétfő)

7. feladatsor **2013.03.19.**

1. Egy kupacban 31 kavics van. két játékos a következő játékot játssza: egy lépésben el lehet venni 1, 2 vagy 3 darab kavicsot. Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája, ha az nyer, aki

(a) az utolsó kavicsot elveszi?

(b) utoljára vesz el 2 kavicsot?

2. Hány olyan 3-jegyű szám van, melynek az első jegyét törölve az eredeti szám kilencedrészét kapjuk meg?

3. Adott a síkban egy szabályos 21-szög. Hányféleképpen lehet a csúcsai közül kiválasztani hármat úgy, hogy semelyik kettő ne legyen szomszédos?

4. Osztható-e a $2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots \cdot 2012 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots \cdot 2011$ szám 2013-mal? Válaszodat indokold.

5. Két játékos a következő játékot játssza. Az első játékos kiválasztja a sík egy eddig még ki nem választott pontját, a második pedig kiszínezi a kiválasztott pontot pirosra, kékre vagy zöldre. A játék 100 körig vagy addig tart, amíg keletkezik egy egységhosszúságú szakasz, melynek mindkét végpontja azonos színű. Az első játékos pontosan akkor nyer, ha létrejött egy egységhosszúságú szakasz, melynek mindkét végpontja egyforma színű, egyéb esetben a második játékos nyer. Van-e valamelyiküknek nyerő stratégiája?

Beadási határidő: 2013.03.25. (Hétfő)

8. feladatsor **2013.04.04.**

1. Egy matematikus meséli egy másik matematikusnak: ,,Képzeld, mindhárom gyermekemnek ma van a születésnapja. Életkoraik szorzata 36, összege pedig annyi, ahány gomb van a kabátodon." A másik szemügyre veszi a kabátját, majd kis töprengés után így szól: ,,Nem tudom megállapítani a gyermekeid életkorát." Ekkor az első még ennyit mond: ,,Rendben, akkor azt is elárulom, hogy legnagyobb gyermekem vöröshajú." Hány évesek a gyermekek a beszélgetés pillanatában?

2. Az $ABCD$ négyzet AD oldalának felezőpontja M, az M pontból az AC átlóra állított merőleges talppontja N. Mennyi az MNC háromszög és az $ABCD$ négyzet területének aránya?

3. Melyik az a legnagyobb pozitív egész szám, melynek 200-ik hatványa kisebb, mint 5^{300}?

4. Az $ABCD$ trapéz AD és BC szárának felezőpontja M, illetve N. Bizonyítsd be, hogy ha $AND\sphericalangle = BMC\sphericalangle = 90°$, akkor a trapéz húrtrapéz vagy parallelogramma.

5. Ki lehet-e színezni a pozitív egész számokat két színnel úgy, hogy ne lehessen találni három egymástól különböző a, b és c számot, melyek színe egyforma, továbbá $a \cdot b = c$?

Beadási határidő: 2013.04.09. (Kedd)

9. feladatsor **2013.04.12.**

1. Az $ABCD$ paralelogramma tetszőleges belső pontja P. Bizonyítsd be (lehetőleg számolás nélkül), hogy $T_{ABP} + T_{CDP} = T_{ABCD}/2$.

2. Ki lehet-e színezni a körvonal pontjait két szín felhasználásával úgy, hogy ne lehessen kiválasztani három egyszínű pontot, melyek derékszögű háromszöget alkotnak?

3. Pista iskolájában minden gyereknek van száz korongja, rajta a számok egytől százig (ezeket a korongokat matekórán használják). Pista nagyon szeleburdi, és hetvenötöt elvesztett a korongokból. Matekórán a gyerekek azt a feladatot kapják, hogy mindenki válasszon ki saját korongjai közül négyet úgy, hogy kettő-kettő összege ugyanaz legyen (például 1+4=2+3). Pista nagyon aggódik, vajon sikerül-e kiválasztani négyet a megmaradt huszonöt korongja közül a tanítónéni kérésének megfelelően. Meg tudod nyugtatni? Vagy még jobban borzolni a kedélyét?

4. A Bergengóc Parlamentben 10 bizottság működik. Minden honatya két bizottságban dolgozik, és bármely két bizottságnak pontosan egy közös tagja van. Hány tagú a Bergengóc parlament?

5. $ABCDEFGFH$ egy szabályos 8-szög. Hanyadrésze az $ABEF$ téglalap területe a nyolcszög területének?

Beadási határidő: 2013.04.17. 12 óra

10. feladatsor **2013.04.19.**

1. Az A halmaz azokból az ötjegyű számokból áll, melyekben a jegyek szorzata 25, a B halmaz pedig azokból az ötjegyű számokból áll, melyekben a jegyek szorzata 15. Melyik halmaznak van több eleme?

2. Mennyi az n, ha $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$?

3. Az $ABCD$ paralelogramma egyik átlójának csúcsoktól különböző pontja P. A P ponton keresztül két párhuzamost húzunk az oldalakkal. Bizonyítsd be, hogy a keletkező négy kisebb paralelogramma között van kettő, melyek területe egyenlő.

4. Az x, y, z számokról tudjuk, hogy $x^2 \cdot y \cdot z^3 = 7^3$ és $x \cdot y^2 = 7^9$. Mennyi lehet $x \cdot y \cdot z$ értéke? Mutass is három ilyen számot.

5. Az $ABCD$ trapéz AD szára merőleges az alapokra, BC szárának hossza pedig a trapéz két alapja hosszának összege. Az AD szakasz felezőpontja F. Mekkora a $BFC\sphericalangle$ szög nagysága?

Beadási határidő: 2013.04.24. 12 óra

11. feladatsor **2013.04.26.**

1. Egy téglalap egyik átlóján felveszek egy pontot, és a pontból párhuzamost húzok a téglalap oldalaival. A kapott négy téglalapból két nem szomszédos téglalap területe 3 és 12 egység. Mekkora a másik két téglalap területe?

2. Legyenek az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2013}$ számok az $1, 2, 3, \ldots, 2013$ számok valamilyen sorrendben. Van-e olyan sorrend, amikor az $(a_1 - 1) \cdot (a_2 - 2) \cdot (a_3 - 3) \cdot \ldots \cdot (a_{2013} - 2013)$ szorzat

(a) 2012

(b) 2013?

3. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, melynek fele négyzetszám, harmada pedig köbszám?

4. Az $ABCD$ paralelogramma AD és BC oldalán felvesszük az E és F pontokat úgy, hogy $AE = CF$. Legyen P az AB oldal tetszőleges belső pontja. Az EF egyenes DP-t K-ban, CP-t L-ben metszi. Bizonyítsd be, hogy a KPL háromszög területe egyenlő az EKD és a CLF háromszögek területének összegével.

5. Egy szabályos háromszöget felosztunk n^2 darab egybevágó kis szabályos háromszögre (az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel). Jelölje m azon rombuszok számát, melyek két kis szabályos háromszögből állnak, d pedig azon rombuszok számát, melyek nyolc kis szabályos háromszögből állnak. Fejezd ki az $m - d$ különbséget n segítségével.

Beadási határidő: 2013.05.03.

12. feladatsor **2013.05.17.**

1. Egy minden lapján csokoládéval bevont kocka alakú tortát szeretnénk elosztani 16 ember között úgy hogy mindenkinek ugyanannyi tészta és ugyanannyi csoki jusson. Ehhez a tortát n^3 egyforma kockára osztjuk, és a kis kockákat osztjuk szét a 16 ember között. Melyik a legkisebb n, melyre lehetséges az igazságos szétosztás?

2. 29 kavics van az asztalon. Két játékos felváltva lép. A játékosok egy lépése abból áll, hogy elvesznek az asztalról egy pozitív négyzetszámnyi kavicsot. Az nyer, aki utolsónak vesz el kavicsot vagy kavicsokat az asztalról. Tudsz-e mondani valamelyik játékosnak nyerő stratégiát?

3. Egy szabályos nyolcszöget úgy kapok meg, hogy fogok egy egységnégyzetet (oldalai és területe is egységnyi), elforgatom a középpontja körül 45°-kal, és veszem a két négyzet közös részét. Mennyi a kapott nyolcszög kerületének és területének aránya?

4. A tizes számrendszerben felírt $\overline{abc}$ szám osztható 7-tel. Bizonyítandó, hogy ekkor a $\frac{\overline{bc}+16a}{\overline{bc}-61a}$ tört biztosan egyszerűsíthető.

5. Egy összejövetelen 100 vendég vesz részt, köztük Kovács úr, a titkosügynök. Kovács úr mindenkit ismer, de Kovács urat senki sem ismeri (a többi ismeretségről nem tudunk semmit, és a többi ismeretség sem feltétlenül kölcsönös). Egy újságíró tudósít a fontos összejövetelről, aki tudja, hogy Kovács úr jelen van az összejövetelen, és tisztában van azzal, hogy Kovács úr mindenkit ismer, őt viszont senki sem ismeri. Kovács urat azonban az újságíró sem látta még soha. Az újságíró odamehet egy emberhez, rámutathat egy másik emberre, és megkérdezheti, hogy ismeri-e a másikat a megkérdezett. Legrosszabb esetben hány kérdéssel tudja kideríteni az újságíró, hogy melyik vendég Kovács úr?

Beadási határidő: 2013.05.24.