A Fazekas Matektábor legérdekesebb feladatai

Dunabogdány, 2021. szept. 27. – okt. 1.,

szerkesztette: Hujter Bálint

A speciális matematika tagozat hagyományos őszi matektáborát a 2021-22-es tanévben szeptember 27. és október 1. között rendeztük, az előző évben már jól bevált helyszínen, a dunabodgányi JEKA üdülőben.

A táborban 30 diák vett részt, akik az alábbi csapatokba rendeződve dolgoztak:

- Kiderülünk az ablakon
  (Bognár András Károly, Kercsó-Molnár Anita, Máté Lőrinc, Nádor Benedek 11c).
- Láma Lemma
  (Gábriel Tamás, Mezey Dorottya, Nagy Eszter, Seres-Szabó Márton 11c)
- Leave us alone – we know what we're doing
  (Móra Márton, Móricz Benjámin, Németh Márton, Világi Áron 11c)
- Mao Juice
  (Dánffy Ábel, Fey Dávid, Király Regő, Molnár-Szabó Vilmos 11c)
- A Jó, a Rossz és a Csúf
  (Bencsik Ádám, Baski Bence, Terjék András 12c)
- That's hard
  (Bán-Szabó Áron, Fleiner Zsigmond, Kovács Tamás 12c)
- A vaddisznók szőrősek
  (Kun Ágoston, Nyárfádi Patrik, Réti Zoltán, Rubint Gergő 12c)
- Védd a fákat, egyél hódot
  (Farkas Iza, Galambos Ábel, Móricz Réka, Tot Bagi Márton 12c)

A tábori munkát Ádám Réka és Hujter Bálint matematikatanárok vezették, és nagy segítségükre volt Németh Balázs öregdiákunk is (2018c, a tábor idején a Cambridge University negyedéves matematikus hallgatója). A tábor elindításakor Dobos Sándor munkaközösségvezető is jelen volt.

A következőkben egy összeállítás olvasható a tábor legérdekesebb feladataiból és megoldásaiból. A feladatokat a nemzetközi versenyeken szokásos kategorizálás szerint csoportosítottuk. A feladatoknál jeleztük, hogy melyik diák hozta a táborba, illetve ki írta le az itt szereplő megoldását. A feladatok döntő része a KöMaLból, illetve nemzetközi matematikaversenyekről származik, de akad egy-két saját kitalálású is.

Tartalomjegyzék

1. Algebra

1. feladat (Nádor Benedek)
Az a, b, c pozitív valós számokra teljesül, hogy $a+b+c=3$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a^2}{a+\sqrt[3]{bc}}+\frac{b^2}{b+\sqrt[3]{ca}}+\frac{c^2}{c+\sqrt[3]{ab}}\geq\frac{3}{2}.$$

Németh Márton megoldása. Becsüljük alul a baloldalt a Titu-lemma[1] segítségével.

$$\frac{a^2}{a+\sqrt[3]{bc}}+\frac{b^2}{b+\sqrt[3]{ca}}+\frac{c^2}{c+\sqrt[3]{ab}}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}+\sqrt[3]{ab}}=$$
$$=\frac{9}{3+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}+\sqrt[3]{ab}}=\frac{9}{3+\sqrt[3]{1bc}+\sqrt[3]{1ca}+\sqrt[3]{1ab}}.$$

Becsüljük felül a nevezőt (a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséggel), így a tört értéke csökkenni fog, vagy nem változik:

$$\frac{9}{3+\sqrt[3]{1\cdot b\cdot c}+\sqrt[3]{1\cdot c\cdot a}+\sqrt[3]{1\cdot a\cdot b}}\geq\frac{9}{3+\frac{1+b+c}{3}+\frac{1+c+a}{3}+\frac{1+a+b}{3}}=\frac{3}{2}.$$

Egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha a végső becslésnél teljesül a számtani-mértani közepek egyenlősége, vagyis $a=b=c=1$. □

2. feladat (Kun Ágoston)
Legyen m, n pozitív egész és $0\leq x\leq 1$. Igazoljuk, hogy

$$(1-x^n)^m+(1-(1-x)^m)^n\geq 1.$$

Terjék András megoldása. Vegyünk egy n sorból és m oszlopból álló táblázatot, amelynek minden mezejében egy lámpa áll. Minden lámpa egymástól független x eséllyel van felkapcsolva, $1-x$ eséllyel lekapcsolva.

Vegyük észre, hogy x^n az esélye, hogy egy oszlopban minden lámpa fel legyen kapcsolva, tehát $(1-x^n)^m$ annak az esélye, hogy minden oszlopban van lekapcsolt lámpa.

Vegyük észre, hogy $(1-x)^m$ az esélye, hogy egy sorban minden lámpa le legyen kapcsolva, tehát $(1-(1-x)^m)^n$ annak az esélye, hogy minden sorban van felkapcsolt lámpa.

Ezek összege:

$$(1-x^n)^m+(1-(1-x)^m)^n$$

legalább annyi, mint annak az esélye, hogy minden oszlopban van lekapcsolt, vagy minden sorban van felkapcsolt lámpa. De ez egy biztosan teljesülő esemény, hiszen ha van olyan oszlop, amelyben nincsen lekapcsolt lámpa, akkor ebben az oszlopban minden lámpa fel van kapcsolva, ami minden egyes sorban jelent egy-egy felkapcsolt lámpát. Következésképpen

$$(1-x^n)^m+(1-(1-x)^m)^n\geq 1.$$

□

[1] https://hu.wikipedia.org/wiki/Titu-lemma

3. feladat (Kun Ágoston)
Legyen $a_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$, ahol n pozitív egész számot jelent.
Bizonyítsd be, hogy van olyan k pozitív egész szám, amelyre a $P_k = a_2 \cdot a_3 \cdot, \ldots \cdot a_k$ szorzat értéke nagyobb 1000-nél. Melyik a legkisebb ilyen k szám?

Baski Bence megoldása. Minden pozitív egész n-re:

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} = \frac{n^3 + n^2 - n - 1}{n^3} = \frac{(n+1)(n^2-1)}{n^3} = \frac{(n-1)(n+1)(n+1)}{n^3},$$

így minden x pozitív egészre:

$$P_x = \frac{(1 \cdot 3^2) \cdot (2 \cdot 4^2) \cdot \ldots \cdot (x-3)(-1)^2 \cdot (x-2)x^2 \cdot (x-1)(x+1)^2}{2^3 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot (x-1)^3 \cdot x^3}.$$

Tudjuk, hogy a számlálóban minden szám 3 és $x-1$ között pontosan háromszor fog előfordulni szorzótényezőként, hiszen egyszer fog szerepelni $n-1$-ként és kétszer fog szerepelni $n+1$-ként. Ezen kívül az 1 és a 2 nem szerepelnek $n+1$-ként, hiszen 2 a legkisebb n, így ezek csak egyszer szerepelnek és az x, illetve $x+1$ számok nem szerepelnek $n-1$-ként, hiszen a n legnagyobb viszgált értéke x, így ezekből csak 2 szorzótényező lesz. Tehát felírható, hogy:

$$P_x = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3^3 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot (x-2)^3 \cdot (x-1)^3 \cdot x^2 \cdot (x+1)^2}{2^3 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot (x+1)^3 \cdot x^3}.$$

Bővítsünk a $1^3 \cdot 2^2 \cdot x \cdot (x+1) = 4x^2 + 4x$ szorzattal:

$$P_x = \frac{1 \cdot 1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot (x-2)^3 \cdot (x-1)^3 \cdot x^3 \cdot (x+1)^3}{1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot (x-1)^3 \cdot x^3 (4x^2 + 4x)}.$$

Egyszerűsítsünk a $1^3 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot (x-1)^3 \cdot x^3$ szorzattal:

$$P_x = \frac{(x+1)^3}{4x^2 + 4x} = \frac{(x+1)^2}{4x}.$$

Tehát azt a k-t keressük, amelyre $P_{k-1} \leq 1000 < P_k$, azaz $\frac{k^2}{k-1} \leq 4000 < \frac{(k+1)^2}{k}$. Ebből:

$$\frac{(k^2-1)+1}{k-1} = \frac{k^2-1}{k-1} + \frac{1}{k-1} = k + 1 + \frac{1}{k+1} \leq 4000 < \frac{k^2+2k+1}{k} = k + 2 + \frac{1}{k}.$$

2-t kivonva az egyenlőtlenségből:

$$k - 1 + \frac{1}{k} \leq 3998 < k + \frac{1}{k}.$$

Tehát a megoldás $k = 3998$, hiszen $k > 1$, így $\frac{1}{k} < 1$. □

4. feladat (Nádor Benedek)
Keresd meg az összes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amire bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x^3) + f(y^3) = (x+y)(f(x^2) + f(y^2) - f(xy)).$$

Gábriel Tamás megoldása.

$$f(x^3) + f(y^3) = (x+y)\left[f(x^2) + f(y^2) - f(xy)\right] \tag{1}$$

Először behelyettesítek (1)-ben y helyére x-et:

$$f(x^3) + f(x^3) = 2x\left[f(x^2) + f(x^2) - f(x^2)\right]$$

Ezt rendezve:

$$f(x^3) = xf(x^2) \tag{2}$$

Most pedig kibontom az (1)-es egyenletben a zárójeleket:

$$f(x^3) + f(y^3) = xf(x^2) + yf(x^2) + xf(y^2) + yf(y^2) - (x+y)f(xy)$$

Ezután a (2) egyenletet felhasználva a következőt kapjuk:

$$f(x^3) + f(y^3) = f(x^3) + yf(x^2) + xf(y^2) + f(y^3) - (x+y)f(xy)$$

Ezt rendezve:

$$(x+y)f(xy) = xf(y^2) + yf(x^2) \tag{3}$$

Most behelyettesítek (1)-ben y helyére $-x$-et. Ekkor:

$$f(x^3) + f(-x^3) = 0 \quad \text{azaz} \quad -f(x^3) = f(-x^3)$$

Itt pedig x helyére behelyettesítek $\sqrt[3]{x}$-et (ami a valósak körében egy teljesen ekvivalens átalakítás):

$$-f(x) = f(-x) \tag{4}$$

Most behelyettesítek (3)-ban y helyére $-y$-t:

$$(x-y)f(-xy) = xf(y^2) - yf(x^2)$$

Ezt a következő alakra hozhatjuk a (4) egyenlet felhasználásával:

$$(y-x)f(xy) = xf(y^2) - yf(x^2) \tag{5}$$

Most összeadom a (2) és (5) egyenleteket:

$$2yf(xy) = 2xf(y^2) \quad \text{azaz} \quad yf(xy) = xf(y^2)$$

Végül behelyettesítek y helyére 1-et:

$$f(x) = xf(1), \quad \text{azaz ha} \quad f(1) = m, \quad \text{akkor} \quad f(x) = mx$$

Tehát a feladatban szereplő feltételnek megfelelő függvények az origón átmenő egyenesek. Ezt visszaellenőrizve azt kapjuk, hogy ezek valóban jók is lesznek. □

2. Kombinatorika

2.1. Leszámlálások

5. feladat (Tot Bagi Márton)
Egy permutációját az $1, 2, \dots, m$ számoknak *friss*nek hívunk, ha nincs olyan $k < m$ szám úgy, hogy a permutáció első k száma az $1, 2, \dots, k$ számok valamilyen sorrendben.
Legyen f_m az $1, 2, \dots, m$ számok friss permutációinak a száma.
Lássuk be, hogy $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ teljesül minden $n \geq 3$-ra.

Kun Ágoston megoldása. Tekintsük az $1, 2, \dots, n$ számok egy tetszőleges π permutációját. Az n számot helyezzük át a sor végére, így kapjuk a π' permutációt, amely már biztosan nem friss, hiszen az első $n-1$ eleme az $\{1, 2 \dots, n-1\}$ egy permutációja. Persze a sorozat már hamarabb is „megromolhatott”: jelölje $r = r(\pi')$ a legkisebb olyan számot, amelyre π' első r száma az $1, 2, \dots, r$ valamilyen sorrendben.

Rögzítsünk most egy i értéket, és számoljuk meg, hogy hány olyan π friss permutáció lehet, amelyre $r(\pi') = i$. Ilyenkor π' első i eleme az $\{1, 2, \dots, i\}$ számok egy friss permutációját alkotja (ha nem lenne friss, akkor $r(\pi') < i$ lenne). π-ben n-nek az első i hely valamelyikén kellett lennie (különben π sem lett volna friss), de ezek bármelyikén lehetett. π utolsó $n - i - 1$ helyén pedig az $\{i + 1, i + 2, \dots, n - 1\}$ számok tetszőleges sorrendben jöhettek.

Azt kaptuk, hogy azon π friss permutációk száma, melyekre $r(\pi') = i$, éppen

$$i \cdot f_i \cdot (n - 1 - i)!$$

Ebből rögtön következik az alábbi lemma:

Lemma:

$$f_n = \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot f_i \cdot (n - 1 - i)!$$

A lemma alapján felírva a bizonyítandó állítás bal oldalát:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot f_i \cdot (n - 1 - i)! \geq n \cdot f_{n-1}$$

azaz

$$1 \cdot f_1 \cdot (n - 2)! + 2 \cdot f_2 \cdot (n - 3)! + \dots + (n - 1) \cdot f_{n-1} \cdot 0! \geq n \cdot f_{n-1}$$

Kivonva mindkét oldalról $(n-1) \cdot f_{n-1}$-et, majd a jobb oldalon maradó f_{n-1}-et átírva a lemmával ezt kapjuk:

$$1 \cdot f_1 \cdot (n - 2)! + 2 \cdot f_2 \cdot (n - 3)! + \dots + (n - 2) \cdot f_{n-2} \cdot 0! \geq$$

$$\geq 1 \cdot f_1 \cdot (n - 3)! + 2 \cdot f_2 \cdot (n - 4)! + \dots + (n - 2) \cdot f_{n-2} \cdot 0! \cdot$$

Erről pedig már látszódik, hogy igaz, mivel a fenti összeg minden tagja nagyobb a lenti párjánál (1-gyel nagyobb faktoriálissal szorozzuk). □

6. feladat (Kovács Tamás)
Legyenek n és k pozitív egészek, amelyekre $k \geqslant n$ és $k-n$ páros szám. Adott $2n$ lámpa, melyek 1-től $2n$-ig vannak számozva, melyek mindegyike *be*(kapcsolt) vagy *ki*(kapcsolt) állapotban lehet. Kezdetben mindegyik lámpa ki állapotban van. *Lépések* egy sorozatát tekintjük: egy lépés abból áll, hogy valamelyik lámpa állapotát megváltoztatjuk.
Legyen N az olyan k lépésből álló sorozatok száma, melyek eredményeképpen az 1-től n-ig számozott lámpák bekapcsolt, az $(n+1)$-től $2n$-ig számozott lámpák pedig kikapcsolt állapotban lesznek.
Legyen M az olyan k lépésből álló sorozatok száma, melyek eredményeképpen az 1-től n-ig számozott lámpák bekapcsolt, az $(n+1)$-től $2n$-ig számozott lámpák pedig kikapcsolt állapotban lesznek és a sorozatban az $(n+1)$-től $2n$-ig számozott lámpák semelyikét sem kapcsoljuk be semmikor.
Határozzuk meg az N/M hányados értékét!

Nyárfádi Patrik megoldása. Legyen az első n lámpa sorban $\ell(1), \ell(2), \ell(3), \ldots, \ell(n)$ az utánuk lévő n lámpa pedig $L(1), L(2), L(3), \ldots, L(n)$. Tudjuk, hogy az olyan k lépésből álló, a feltételeket teljesítő sorozatok száma, amelyekben csak az $\ell(1), \ell(2), \ell(3), \ldots, \ell(n)$ lámpákhoz nyúlunk hozzá az M.

Most nézzük meg, hogy egy M-béli sorozathoz hány N-béli sorozatot tudunk rendelni.

Tudjuk, hogy van k eleme ezeknek a sorozatoknak és mindegyik elem valamelyik lámpa kapcsolását jelöli (egy sorozat i. eleme azt jelöli, hogy amikor a feladat feltételeinek megfelelő eljárást végeztük, akkor az i. lépésként melyik lámpát kapcsoltuk át). Ekkor minden egyes elemrő eldönthetjük, hogy ugyanígy az $\ell(x)$ lámpát kapcsoljuk át, vagy helyette az $L(x)$ lámpát. Vagyis mindegyik elemről nem, ugyanis minden egyes lámpát érő utolsó kapcsolásról már nem dönthetünk: ha addigra az $\ell(x)$ lámpa fel van kapcsolva, akkor biztosan az utolsó kapcsolást az $L(x)$ lámpán végezzük el, ha pedig le van kapcsolva, akkor biztosan ezen, hiszen csak így kapunk olyan sorozatot, amely az N-be tartozó sorozatok feltételeit is teljesíti (tehát hogy a kapcsolgatások végén az első n lámpa fel, az utánuk lévő n lámpa le lesz kapcsolva). Tehát összesen $k-n$ esetben dönthetünk(mindegyik lámpánál történik legalább egy kapcsolás, ezért biztosan lesz utolsó kapcsolás), ez azt jelenti, hogy az M db sorozat mindegyikéhez 2^{k-n} db N-béli sorozatot rendeltünk, így $N/M = 2^{k-n}$.

Már csak azt kell meggondolni, hogy ekkor minden N-béli sorozat egyértelműen visszavezethető egy M-béli sorozatra. Ez pedig egyértelmű, hiszen minden N-béli sorozathoz az az M-béli sorozat rendelődik, ahol ha a sorozatban egy $L(x)$ lámpát kapcsolunk át, akkor helyette ugyanakkor (tehát ugyanazon sorszámú lépésben) $\ell(x)$ lámpát kapcsoljuk át. Ebből látszik, hogy ez mindig egy M-béli sorozatot ad, tehát minden N-béli sorozatot hozzárendeltünk egy M-béli sorozathoz.

Meggondolandó még, hogy a leírt konstrukció által (amikor egy M-béli sorozathoz 2^{k-n} db N-béli sorozatot rendelünk) mindig olyan sorozatot rendelünk egy M-béli sorozathoz, ami valóban teljesíti az N-béli sorozatokra vonatkozó feltételeket. Az első n lámpa mind felkapcsolt állapotban lesz a hozzárendelés után is, hiszen az utolsó kapcsolásról pont emiatt nem dönthettünk az eljárásban. A második n lámpa pedig mind lekapcsolt állapotban lesz, hiszen egy adott M-béli sorozatban minden lámpát az első n lámpa közül páratlansokszor kapcsoltunk át. Ezután tudjuk, hogy néhány kapcsolást „átviszünk” az $\ell(x)$ lámpáról $L(x)$ lámpára és ezek az átvivések után még mindig páratlansokszor lesz átkapcsolva, hiszen a feltételeket teljesíteni fogja, azaz a végén felkapcsolt állapotban lesz. Ez viszont azt jelenti, hogy párossok kapcsolást „vittünk át”, hiszen páratlanból csak párost kivonva kapunk páratlan számot. A páros kapcsolás pedig pont azt eredményezi, hogy a lámpa a végén lekapcsolt állapotban lesz, azaz a hozzárendelt sorozatban az $L(1), L(2), L(3), \ldots, L(n)$ lámpák lekapcsoltban lesznek, így a hozzárendelt sorozatok valóban teljesítik az N-béli sorozatokra vonatkozó feltételeket.

Tehát megvizsgáltuk, hogy a hozzárendelés megfelelő, és hogy a hozzárendeléssel minden kellő sorozatot megkapunk, hiszen visszavezethető a hozzárendelés, tehát a válasz valóban helyes, azaz $N/M = 2^{k-n}$ □

2.2. Gráfok

7. feladat (Nagy Eszter)
Bejárható-e minden konvex poliéder alkalmasan választott élek mentén haladva úgy, hogy közben minden csúcsot pontosan egyszer érintünk és visszatérünk a kiinduló csúcsba?

A kérdés így fogalmazható gráfelméleti nyelven: igaz-e, hogy minden konvex poliéder élgráfjának van Hamilton-köre?

Dánffy Ábel megoldása. Mutassuk meg, hogy létezik olyan konvex poliéder, ami nem bejárható így.

Vegyünk egy oktaédert. Minden lapjához rendeljünk egy a testen kívül eső pontot úgy, hogy a pontokat a hozzájuk tartozó lap összes csúcsával összekötve konvex poliédert kapjunk. (Ez mindig megoldható: Válasszuk a pontokat egyesével, úgy, hogy az új pont mindig a hozzá tartozó és a három azzal szomszédos oldal által körülhatárolt térrészben legyen.)

Az így kapott konvex poliéder csúcsait osszuk két csoportra: az eredeti oktaéder csúcsai (6 pont), és az új pontok (8 pont). Az új pontok között nincs két szomszédos, tehát egy új pontba csak egy eredetiből lehet eljutni. Így azonban legfeljebb $6+1=7$ új pontot érinthetünk anélkül, hogy valamelyik eredeti pontot több, mint egyszer érintenénk.

A válasz tehát nem. □

8. feladat (Bán-Szabó Áron)
Bergengócia 10 városát kétféle busztársaság uralja. Bármely két várost pontosan az egyik társaság (oda-vissza) buszjárata köti össze. Mutassuk meg, hogy valamelyik busztársaságnak van két olyan körútja, melyek diszjunktak, továbbá páratlan sok (de egynél több) várost érintenek (külön-külön).

Móricz Réka megoldása. A városokat tekintsük egy gráf csúcsainak, az őket összekötő buszjáratokat pedig az éleknek.

1. lemma: Ha egy 5 csúcsú teljes gráf éleit 2 színnel kiszínezem, lesz benne egyszínű, páratlan hosszú kör.

1. lemma bizonyítása. Egy 5 csúcsú teljes gráf éleinek száma 10. Mivel két színnel színezem ki őket, lesz legalább 5 azonos színű él, legyen mondjuk kék. Ez kétféleképp helyekedhet el:

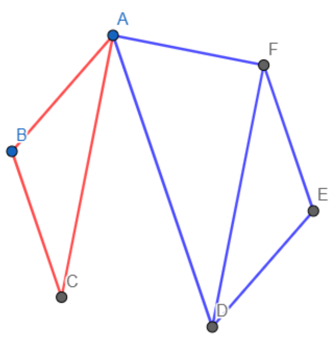
- Vagy minden csúcsból 2 él indul (ekkor egy 5 hosszú kört kapunk amivel készen vagyunk.)
- Vagy lesz olyan csúcs aminek a fokszáma legalább 3.

Ha van olyan csúcs aminek a fokszáma 4 akkor is készen vagyunk, hiszen az 5. él behúzásakor mindenképp kapunk egy háromszöget. Ha van olyan csúcs aminek a fokszáma pontosan 3, akkor ha vesszük azt a 3 csúcsot amit él köt össze vele megfigyelhetjük, hogy ha ezek között fut még egy kék él, akkor megint találtunk egy kék háromszöget. Ha pedig nem, akkor csak a másik színű (legyen mondjuk piros) él kötheti össze őket, de ekkor ezek egy piros háromszöget alkotnak. Ezzel beláttuk a lemmát. □

A látott módszerrel könnyen belátható a következő lemma is:

2. lemma: Ha egy 6 csúcsú teljes gráf éleit 2 színnel kiszínezem, lesz benne egyszínű háromszög.

A kezdeti 10 csúcsból kiválasztok 6-ot. A 2. lemma miatt ebben lesz egy egyszínű háromszög. A megtalált háromszög csúcsain kivül veszek még 6 csúcsot és ezek között is megkeresem a háromszöget. Ha két egyforma színűt sikerült találnom akkor készen vagyok.



Ha nem, akkor veszem a két háromszög csúcsait. Ha ezt ki szeretném egészíteni egy 6 csúcsú teljes gráffá, még 9 élt kell behúznom, amik közül lesz legalább 5 egyforma színű (legyen mondjuk kék). Azt is tudjuk, hogy egy-egy ilyen új él a kék háromszög egy csúcsát a piros háromszög egy csúcsával köti össze. A skatulyaelv alapján ekkor a piros háromszög legalább egy csúcsából legalább két kék él indul ki, vagyis találtunk egy új kék háromszöget, amelynek egy csúcsa azonos a piros háromszög egy csúcsával (AFD háromszög).

De ekkor tudunk mondani öt olyan csúcsot, amelyben egy kék és egy piros háromszög is van (A, B, C, D és F), és az első lemma miatt tudjuk, hogy a kimaradó 5 csúcsban biztosan találunk egy egyszínű páratlan hosszú kört. Ezzel beláttuk a feladatot. □

9. feladat (Németh Márton)
Anna és Bea a következő játékot játszák: Bea kezdetben egy n csúcsú irányítatlan gráf egy ismeretlen csúcsában van, majd minden körben Anna tippel egy csúcsra. Ha Bea éppen ott volt, akkor Anna azonnal nyer, különben Bea átlép egy szomszédos csúcsba. Milyen gráfok esetén tud Anna biztosan véges sok lépésből nyerni?

Megoldás, Kovács Tamás ötleteit felhasználva. Ha a gráfban van kör, akkor nyilván nem lehet Beát megtalálni, mert a körön belül minden csúcsnak 2 szomszédja van. Ha tehát Bea végig ezen a körön lépdel, akkor minden lépésében tud másik mezőt választani, mint amelyre Anna éppen tippelt.

Könnyű azt is meggondolni, hogy ha esetleg nem lenne összefüggő a gráf, akkor pontosan akkor tud Anna nyerni az egész gráfban, ha külön-külön minden összefüggőségi komponensben nyerni tud.

Tehát mostantól feltehetjük, hogy a gráf összefüggő és körmentes, azaz fagráf. Ismert, hogy egy fagráf kromatikus száma 2, azaz csúcsai kiszínezhetők két színnel (piros és kék) úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek. Bea tehát minden lépésében színt fog váltani.

Anna felteheti, hogy Bea kezdetben kék mezőn van. Ha ugyanis Annának van olyan tippsorozata, amellyel ezen feltevés mellett biztosan megtalálja véges lépésben; akkor el tudja kapni Beát a feltevés nélkül is. Ehhez kétszer egymás után végrehajtja a tippsorozatot úgy, hogy ha a tippsorozat páros sok tippből állt, akkor a két sorozat között még egy kört kivár. Így ha az első tippsorozattal nem találta meg Beát, akkor pirosról kellett indulnia, tehát a második tippsorozat kezdetén már kék mezőn áll – hiszen addig Bea páratlan sok lépést tett meg.

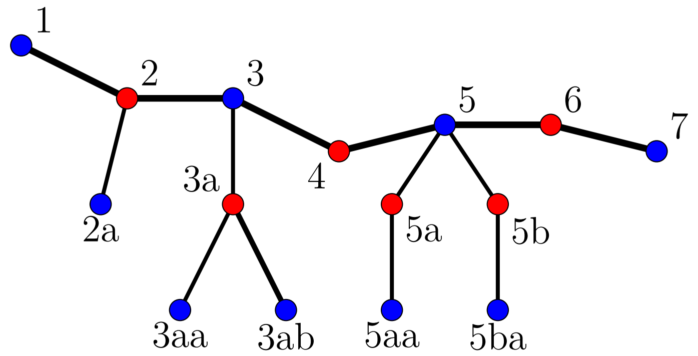
Most tegyük fel, hogy a fagráf egyetlen útból áll, számozzuk meg a csúcsait sorban $1, 2, 3, \ldots, n$-nel, és színezzük úgy pirossal és kékkel, hogy a páratlan számú csúcsok legyenek kékek.

Ha Anna sorban egymás után az $1, 2, \ldots, n$ tippeket mondja, akkor biztosan elkapja Beát (ha Bea kék csúcsról indult). Indukcióval könnyű belátni, hogy ha Anna első k tippje nem talált, akkor Bea a $k+2, k+4, k+6, \ldots$ mezők valamelyikén lehetett csak a tipp pillanatában.

Anna továbbra is nyerő helyzetben marad, ha a gráf úgy néz ki, hogy egy út néhány pontjból legfeljebb két él mélységű „nyúlványok” nőnek ki. Precízebben fogalmazva:

1. állítás:
Anna minden olyan fagráfban nyerni tud, amelyben ki lehet úgy jelölni egy utat úgy, hogy a fagráf összes csúcsából elérhető a kijelölt út legfeljebb két élen végigmenve.

Az 1. állítás bizonyításának vázlata. Anna módszerét egy konkrét példán mutatjuk be:



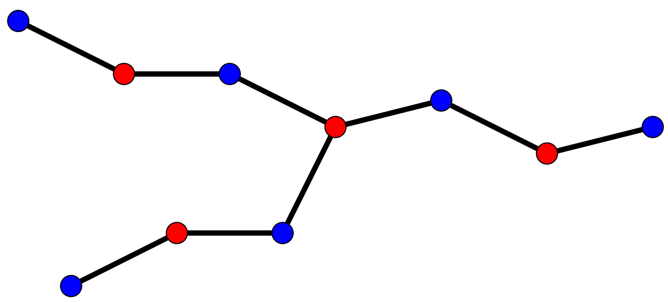
Az ábrán látható gráfon az $1, 2, 3, 3a, 3, 4, 5, 5a, 5, 5b, 6, 6, 1, 7$ tippsorozattal Anna biztosan megtalálja Beát, feltéve, hogy Bea kék csúcsról indult (és mint korábban beláttuk, ez már elég Anna győzelméhez).

Anna tehát úgy megy végig az kijelölt út csúcsain, hogy ha az út egy csúcsából egy vagy több két él mélységű nyúlvány is lelóg, akkor ott „lelassít" egy kis időre, amíg ellenőrzi a nyúlvány(ok)at. Minden egyes kettő mélységű nyúlvány nyúlvány közepére (az úttól 1 távolságra levő csúcsára) is tippel egyet úgy, hogy előtte és utána is a nyúlvány tövére tippel.

A nyúlványok végeihez Annának nem kell elmennie, mivel mindketten minden lépésben színt váltanak, ezért – ha Bea kékről indult – akkor Anna mindig ugyanolyan színű mezőre fog tippelni, mint amelyen Bea éppen áll, azaz Bea sosem lehet a tippelt mező közvetlen szomszédjában.

Annak meggondolását az Olvasóra bízzuk, hogy ezen a módon tényleg minden, az 1. állítás feltételét teljesítő gráfban nyerni tud Anna. □

Pontosan akkor nem teljesül az 1. állítás feltétele, ha a fagráf (alkalmas piros-kék színezéssel) tartalmazza az alábbi részgráfot:



2. állítás:
Ha a gráf tartalmazza az ábrán látható részgráfot, akkor Bea minden lépésében el tud menekülni Anna elől, még akkor is, ha Bea elárulja, hogy kék vagy piros mezőről indul.

A 2. állítás bizonyításának vázlata. Teljes indukcióval beláthatjuk, hogy:

- Annának minden piros tippjénél legalább 3 piros csúcsot is számításba kell vennie, mint Bea lehetséges tartózkodási helyét.
- Anna minden kék tippjénél legalább 4 kék csúcs is számításba jöhet.

A legelső tippnél ez triviálisan teljesül.

Az ábrán látható, hogy bármely 2 piros mezőnek együtt legalább 4 kék szomszédja van. Ezért ha Anna legutóbb pirosat tippelt, és nem talált, akkor (az indukciós feltétel miatt) Bea legalább 3 lehetséges piros tartózkodási helyéből csak 1-et zárhatott ki, így a maradék 2 piros helyből a következő tippre már legalább 4 különböző lehetséges kék hely lesz.

Másrészt az is ellenőrizhető, hogy bármely 3 kék mezőnek együtt van legalább 3 piros szomszédja. Így ha Anna legutóbb kéket tippelt, és nem talált, akkor (az indukciós feltétel miatt) Bea legalább 4 lehetséges kék tartózkodási helyéből csak 1-et zárhatott ki, így a maradék 3 kék helyből a következő tippre már legalább 3 külöböző lehetséges piros hely lesz.

Ezzel az indukciós lépést is beláttuk. □

Azt kaptuk, hogy az 1. állítás feltételét nem teljesítő összefüggő gráfokon Bea nyeri a játékot, amivel válaszoltunk a feladat kérdésére. □

2.3. Halmazok, halmazrendszerek

10. feladat (Mezey Dorottya)
Legyen $H = \{1, 2, \ldots, n\}$. Megadható-e két, közös elem nélküli A és B halmaz, melyek uniója éppen H úgy, hogy A elemeinek összege egyenlő B elemeinek szorzatával, ha **a)** $n = 2016$; **b)** $n = 2017$?

Móricz Benjámin megoldása. Nézzük meg először $n = 5$-re és $n = 6$-ra. $n = 5$ esetén jó szétosztás az $A = 3, 5$ és $B = 1, 2, 4$, míg $n = 6$-ra egy jó szétosztás az $A = 3, 4, 5$, valamint $B = 1, 2, 6$. Megsejthetjük további n értékek vizsgálata után, hogy a B halmazra tetszőleges $n > 4$ esetén találunk jó 3 elemű halmazt.

Vizsgáljuk először csak a páros n-eket. Legyen $n = 2k$. Ekkor az $n = 6$-os minta alapján B halmaz tartalmazza $2k$-t, az 1-et, valamint $k-1$-et. Nézzük meg, hogy ekkor mennyi a B halmaz elemeinek szorzata: ez $2k \cdot (k-1)$. A H halmaz elemeinek összege $\frac{2k\cdot(2k+1)}{2}$ a Gauss-módszerrel kiszámolva, így az A halmaz elemeinek összegét ebből a B halmaz elemeinek összegét kivonva kaphatjuk meg. Ez

$$\frac{2k \cdot (2k+1)}{2} - 2k - (k-1) - 1 = \frac{2k \cdot (2k+1)}{2} - 3k = \frac{2k \cdot (2k+1) - 2 \cdot 3k}{2} = \frac{2k \cdot (2k-2)}{2} = 2k \cdot (k-1).$$

Kijött, hogy az A elemeinek összege ugyanannyi, mint a B elemeinek szorzata, $2k \cdot (k-1)$. Így $n = 2k$ esetén a $B = 2k, k-1, 1$ és $A =$összes többi H-beli elem jó halmazok lesznek, mivel $2k \neq k-1$ és $k-1 > 1$, $n > 4$ esetén. Ezzel mindig megadható két ilyen halmaz $n > 4$ páros számra.

Most vizsgáljuk a páratlan n-eket! Legyen $n = 2k+1$. Ekkor az $n = 5$-ös esethez hasonlóan tartalmazza B $2k$-et, az 1-et és k-t! Ebben az esetben a B halmaz elemeinek szorzata könnyen kiszámítható, $2k \cdot k$. Az A halmaz tartalmazza az összes többi n-nél nem nagyobb pozitív egészt. Számítsuk ki A elemeinek összegét! Ez egyenlő lesz a H és B halmazok elemeinek összegének különbségével. A H halmaz elemeinek összegét Gauss-módszerrel kiszámíthatjuk: $\frac{(2k+1)\cdot(2k+2)}{2}$, míg B halmazé $3k+1$. Így az A halmaz elemeinek összege

$$\frac{(2k+1) \cdot (2k+2)}{2} - (3k+1) = (2k+1) \cdot (k+1) - (3k+1) = 2k^2 + 3k + 1 - (3k+1) = 2k^2 = 2k \cdot k.$$

Ismét kijött, hogy az A halmaz elemeinek összege, valamint a B halmaz elemeinek szorzata is $2k \cdot k$. Így $n = 2k+1$ esetén legyen a B halmaz a $B = 2k, k, 1$, míg az A halmaz a többi n-nél nem nagyobb pozitív egész halmaza. Ezek jó halmazok lesznek, mivel $2k \neq k$ és $k > 1$, $n > 3$ esetén. Mindig megadható két ilyen halmaz $n > 3$ páratlan számra.

$5 \leq n$ esetén mindig megadható a feltételeket teljesítő két halmaz, így $n = 2016$ és $n = 2017$ esetén is. □

11. feladat (Németh Márton)
Létezik-e az $0, 1, 2, \ldots, n-1$ számok egy $a_0, a_2 \ldots, a_{n-1}$ permutációja, amelyre minden $0 \leq i < n-1$ esetén a_i és a_{i+1} kettes számrendszerbeli felírása pontosan egy számjegyben különbözik (pl.: 1001 és 1011 egy számjegyben különböznek), ha
a) n kettőhatvány? **b)** n tetszőleges pozitív egész szám?

Kercsó-Molnár Anita megoldása. **a)** *Állítás:* Ha $n = 2^N$, akkor létezik megfelelő permutáció, sőt olyan is, melyben a_{n-1} és a_0 is csak 1 számjegyben különbözik.
Teljes indukció:

- $N = 1$-re létezik megfelelő permutáció: 0, 1.
- Ha $N = k$-ra létezik, akkor $N = k + 1$-re is:
  Legyen k-ra egy megfelelő permutáció $a_0, a_1 \ldots, a_{2^k-1}$.
  Ekkor a $k+1$-re: $2a_0+0, 2a_0+1, 2a_1+1, 2a_1+0, 2a_2+0, 2a_2+1, \ldots, 2a_{2^k-1}+1, 2a_{2^k-1}+0$ egy megfelelő permutáció. Indoklás: 2-es számrendszerben a 2-vel szorzás olyan, mintha a szám mögé írnánk egy 0-t.
  Szomszédosak lehetnek:
  - $2a_i + 0$ és $a_i + 1$, ezek csak az utolsó számjegyben különböznek.
  - $2a_i + 0$ és $2a_{i+1} + 0$ vagy $2a_i + 1$ és $2a_{i+1} + 1 \to$ csak 1 számjegyben különböznek, mert az indukciós feltevés szerint a_i és a_{i+1} 1 számjegyben különböznek.

Mivel 2^k-1-ig páros sok egész van, ezért ha a hozzáadott számjegyek rendre $0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \ldots$, akkor utoljára a_{2^k-1} mögé 0-t írunk, ugyanazt, mint az első tagnál, tehát az új permutációban is fennáll, hogy az első és az utolsó tag is csak 1 számjegyben különböznek.

b) *Állítás:* Általános n-re is létezik megfelelő permutáció.
„Még teljesebb” indukció aszerint, hogy n hány jegyű a 2-es számrendszerbeli alakjában: n jegyeinek számát jelölje N.

- $N = 1$-re minden lehetséges n-re létezik megfelelő permutáció:
  $n = 0$-ra: 0 vagy $n = 1$-re: 0, 1.
- Ha minden $N \leq k$ jegyű n-re létezik, akkor minden $N = k + 1$-jegyű n-re is:

  Legyen $n = 2^k + m$, ahol $m < 2^k$, azaz m legfeljebb k jegyű. Az indukciós feltevés (ha $m + 1 = 2^k$, akkor az a) feladatrész) miatt az m-nél nem nagyobb nemnegatív egészeknek van megfelelő perumtációja. Ezek elé egy 1-est írva a $2^k, 2^k + 1, \ldots, 2^k + m$ számoknak egy megfelelő premutációját kapjuk: $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$

  Emellett az a) feladatrészben beláttuk, hogy a $0, 1, \ldots, 2^k - 1$ számoknak van olyan megfelelő permutációja, amelyben nem csak a szomszédos, hanem az első és az utolsó tagra is igaz a tulajdonság. Azaz ez egy „kör”, tehát megválaszthatjuk az utosó tagját.
  Ezek a számok kettes számrendszerben megfeleltethetők a $k+1$-jegyű számoknak, melyek első számjegye 0. Vegyük közülük azt a számot, amely az utolsó k jegyében megegyezik b_0-lal, legyen ez a szám az utolsó (a 2^k.) tag a permutációban. Ezután következhetnek a $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ számok.

□

12. feladat (Fleiner Zsigmond)
Legyenek $A, B \subset \mathbb{N}$ véges halmazok. Jelölje $A + B$ azt a halmazt, amelynek pontosan azok az elemei, amit megkaphatunk egy A beli és egy B beli szám összegeként. Jelölje $c \times A$ azt a halmazt, amelynek az elemei az A halmaz c-szeresei.
Bizonyítsuk, hogy $|A + 2 \times A| \geq 3|A| - 2$.

Galambos Ábel megoldása. Indukcióval bizonyítjuk, hogy ha minden legfeljebb k elemű halmazra igaz az állítás, akkor a $k + 1$ eleműekre is.
Kezdeti lépés: 1 elemű halmazra tisztán látszik, hogy egyenlőség áll fenn, így az állítás igaz.
Indukciós lépés: vegyünk egy tetszőleges $k + 1$ elemű halmazt, ekkor tudjuk, hogy arra a halmazra, amiből a legnagyobb elem hiányzik igaz lesz az állítás (hiszen az csak k elemű). Legyen a k elemű halmaz H, legnagyobb eleme m, az új elem (ami nagyobb mint m) pedig u. Amikor visszatesszük bele a legnagyobb elemet, akkor a jobb oldal pontosan 3-mal fog nőni.

A bal oldal pedig legalább 3-mal fog nőni, hiszen minden eddigi elem benne lesz az új bal oldalban, ám míg eddig a $3m$ volt a legnagyobb elem, meg fognak jelenni a $u+2u = 3u$, $m+2u$, $u + 2m$ elemek, melyek mind nagyobbak mint $3m$, tehát a bal oldal legalább 3-mal nőtt. □

13. feladat (Seres-Szabó Márton)
Legyen $1 \leq r \leq n$ és vegyük az összes r elemű részhalmazát az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak. Minden részhalmaznak van egy legkisebb eleme. Bizonyítsuk be, hogy ezen legkisebb elemek számtani közepe $\frac{n+1}{r+1}$.

Tot Bagi Márton megoldása. Számoljuk össze, hogy hány részhalmazban lesz az 1 a legkisebb elem, a 2 a legkisebb elem, ..., az $n - r + 1$ a legkisebb elem.

$$\frac{\binom{n-1}{r-1} + 2\binom{n-2}{r-1} + 3\binom{n-3}{r-1} + \cdots + (n-r+1)\binom{r-1}{r-1}}{\binom{n}{r}}$$

Alkalmazzuk a „zokni szabályt” azaz a közismert

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-2}{r-1} + \binom{n-3}{r-1} + \cdots + \binom{r-1}{r-1} = \binom{n}{r}$$

azonosságot. Ha ezt megcsináljuk $\binom{n-2}{r-1}$-től, $\binom{n-3}{r-1}$-től, ...kezdve is, megkapjuk, hogy a legkisebb elemek átlaga:

$$\frac{\binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \binom{n-2}{r} + \cdots + \binom{r}{r}}{\binom{n}{r}}$$

vagyis ha még egyszer alkalmazzuk a zokni szabályt, megkapjuk, hogy:

$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{\frac{n+1}{r+1}\binom{n}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}$$

Ezzel beláttuk az állítást. □

A megoldás végén Márton még megfogalmazta az alábbi általánosítást is (bizonyítania nem sikerült).

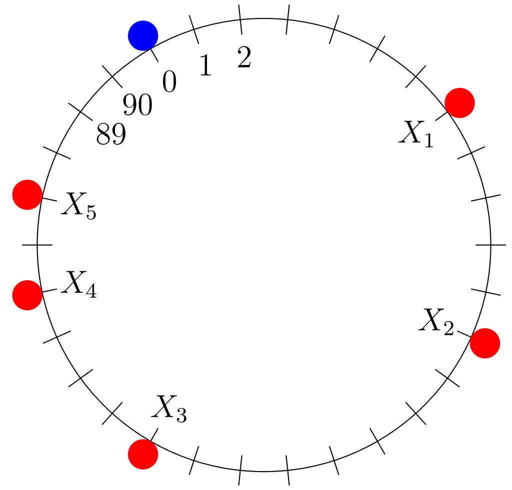
Márton sejtése:
Általában a k-adik legkisebb elemek (ahol $k \leq r$) számtani közepe $\dfrac{k(n+1)}{r+1}$.

A megoldás megbeszélése után felvetődött az is, hogy izgalmas lenne egy kevésbé számolós megoldás, amiből kijöhetne Márton sejtése is, és talán jobban meg is értenénk az egészet. Néhány perccel később aztán Ádám Réka tanárnő eszébe jutott, hogy az általános sejtés egy másik speciális esete a következő közismert feladat.

14. feladat (folklór)
Mennyi az ötöslottón (90-ből 5 számot húznak) kihúzott legkisebb nyerőszám várható értéke? És a második legkisebbé?

A feladat híres, a szimmetriára és a várható érték additivitására épülő megoldása pedig könnyen általánosítható Márton sejtésének bizonyítására.

A híres megoldás. Osszuk fel képzeletben egy kör kerületét 91 jellel egyforma ívdarabokra. Ezután sorsolással (egyenletes eloszlás szerint) jelöljünk meg pirossal a 91 jel közül 6-ot, aztán a 6 piros jel közül egyet válasszunk véletlenszerűen (egyenletes eloszlással), és azt fessük át kékre. A kék jelre írjunk 0-t, majd óramutató járása szerint haladva írjuk az 1, 2, ..., 90 számokat a többi jel mellé. Jelöljék



$$1 \leq X_1 < X_2 < X_3 < X_4 < X_5 \leq 90$$

valószínűségi változók a pirossal megjelölt helyekre jutó számokat. Ezek éppen megfelelnek egy lottóhúzás eredményének: sőt, mind a $\binom{90}{5}$-féle eredmény egyfomra eséllyel jött létre, azaz akár így is sorsolhatnánk a lottót.

Legyen $X_0 = 0$ és legyen $Y_k = X_k - X_{k-1}$. Az Y_k valószínűségi változóra úgy is gondolhatunk, hogy a k-adik legkisebb számú piros jelet hány ívdarab válaszja el az óramutatóval ellentétesen legközelebbi színes jeltől. Vezessük be az $Y_6 = 91 - X_5$ változót is, ez a kék jeltől számolja az ívdarabokat a legnagyobb számú piros jelig. Így az $Y_1, Y_2, \ldots, Y_6$ felfogható úgy is, mint az eredetileg kiválasztott 6 piros jel közül a szomszédosak távolsága. Tehát mindegyik azonos eloszlású, így a várható értékük is egyenlő kell legyen. De közben $Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_6 = 91$, azaz a várható értékeik összege is 91, tehát külön-külön bármelyik Y_k várható értéke $\frac{91}{6}$ kell legyen.

Így a legkisebb nyerőszám várható értéke $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(Y_1) = \frac{91}{6}$,
míg a második legkisebbé $\mathbb{E}(X_2) = \mathbb{E}(Y_1) + \mathbb{E}(Y_2) = \frac{91}{3}$. □

15. feladat (Móricz Benjámin)
Egy bűvészmutatvány során a közönség egy tagja gondol két tetszőleges N és K pozitív egészre úgy, hogy $N > K$, valamint leír egy N-hosszú 0 és 1-ből álló sorozatot. Ezután a mutatvány vezetője leírja az összes olyan N hosszú sorozatot, ami pontosan K helyen tér el az eredeti sorozattól. A bűvész csak ezeket a számokat látja.
Hány tippből tudja biztosan kitalálni a bűvész az eredeti sorozatot?

Máté Lőrinc. N-t ki tudjuk találni abból, hogy milyen hosszúak a kapott sorozatok. K-ra a kapott sorozatok darabszámából következtethetünk, de ez tipikusan kétféle is lehet. Hiszen ha a sorozatok darabszáma S, akkor $S = \binom{N}{K}$, márpedig adott N és S mellett ha x megfelelő K-nak, akkor $y = N - x$ is (de más nem), a Pascal-háromszög ismert tualjdonságai szerint.

N és K tudatában tudjuk, hogy hányszor egyezik meg a kapott sorozatokban az i. elem az eredeti sorozat i. elemével és hányszor nem. A megegyezés darabszáma $\binom{N-1}{K}$, a nem megegyezés darabszáma pedig $\binom{N-1}{K-1}$.

Ha megnézzük azt, hogy a sorozatokban egy adott i. helyen álló elem az hányszor 1-es és hányszor 0-ás, abból egyértelműen következik az N és a K tudatábon, hogy az eredeti sorozat i. eleme az mi volt. Például, ha tudjuk, hogy $N = 10$ és $K = 4$, továbbá hogy, akkor az i. helyen álló elem $\binom{N-1}{K}$-szor fog megegyezni az eredetivel, tehát jelen esetben $\binom{9}{4} = 126$. Ha tehát például az i. helyen álló elem 84-szer volt 0-ás és 126-szor 1-es, akkor az eredeti sorozat i. eleme biztosan egy 1-es volt. Ha tehát tudjuk K-t, akkor tipikusan 1 tipp is elég – de mivel K általában kétféle lehet a kapott adatok alapján, ezért a bűvész csak 2 tippből tudja biztosan kitalálni az eredeti sorozatot.

Külön vizsgálandó az az eset, amikor x és y megegyezik, illetve amikor

$$\binom{N-1}{K} = \binom{N-1}{K-1}.$$

Ezek az esetek egybeesnek, mert ha $x = y$, akkor tudjuk, hogy $K = \frac{N}{2}$. És csak ebben az esetben egyezik meg $\binom{N-1}{K}$ és $\binom{N-1}{K-1}$ (a Pascal-háromszög miatt), de ebben az esetben mindig. Ilyenkor az i. elemről nem tudjuk egyértelműen eldönteni, hogy 1-es vagy 0-ás.

Azonban ha az egyik elemről feltesszük, hogy az milyen volt az eredeti sorozatban, abból a sorozat maradék része már egyértelműen következik. Például tegyük fel, hogy az 1. elem egy 0-ás. Ha csak ezeket a sorozatokat nézzük a későbbiekben, akkor tudjuk, hogy az egyes i. elemek azok ezekből a sorozatokból hányszor egyeztek meg az eredeti i. elemmel. Az előzőkhöz hasonlóan $\binom{N-2}{K}$-szor egyezett meg és $\binom{N-2}{K-1}$-szer meg nem. És mivel már $\binom{N-2}{K}$ nem egyezhet meg $\binom{N-2}{K-1}$-gyel, ezért a sorozat innen már egyértelmű. Mivel a K ebben az esetben egyértelmű és az első elem (vagy amelyikről feltesszük, hogy milyen) csak kétfajta lehet, ezért ebben az esetben is biztosan ki tudja találni a bűvész az eredeti sorozatot 2 tippből. $\square$

2.4. Nyerő stratégiák

16. feladat (Tot Bagi Márton)
Aladár és Béla a 81 lapos pakliból felváltva kiválasztanak egy-egy SET kártyát és leteszik az asztalra. Az veszít, aki után az asztalon szereplő kártyák között először lesz SET. Aladár kezd. Kinek van nyerő stratégiája?

Réti Zoltán megoldása. A SET kártyajátékban 4 féle tulajdonság van és mindegyik tulajdonságnak 3 típusa van. Egy SET 3 kártyából áll, amiben minden jellemzőt külön megvizsgálva, azoknak vagy azonosnak vagy minden kártyán különbözőnek kell lennie. Ennek a szabálynak *minden* egyes tulajdonság esetében meg kell felelnie a kiválasztott három lapnak.

A SET pakli 81 lapja megfeleltethető egy-egy olyan 4-dimenziós vektornak, melyek mind a négy koordinátája a $\{-1, 0, 1\}$ halmaz egy eleme. Mindegyik koordináta egy-egy tulajdonságnak felel meg. SET ha 3 vektor akkor alkot SET-et, ha összegének a koordinátai $\{-3, 0, 3\}$ halmazból vannak; hiszen ha 0 az összeg akkor $\{0, -1, 1\}$-t adunk össze; viszont a 3 (ill. -1) akkor jön ki ha egy koordináta mindhárom vektorban 1 (ill. -1).

Azt állítom, hogy Bélának, azaz a második játékosnak van nyerő stratégiája. Két eset van:

1.eset Aladár nem a $(0; 0; 0; 0)$ kártyát veszi el. Ekkor Béla minden lépésében az Aladár által elvett kártya *tükörképét* veszi el. A kártyának tükörképe A' ha az A-ban lévő 0-k helyén 0; -1-ek helyén 1 és 1-ek helyén -1 áll az A'-ben. Például a $(0, -1, 1, 1)$ kártyának a tükörképe a $(0, 1, -1, -1)$.

Miután Aladár elvette az első kártyát, majd Béla a tükörképét, a játék folytatása során már senki sem veheti el a $(0, 0, 0, 0)$ kártyát, mivel egy tükörkép-pár vektornak az összege egy nullvektor és ha hozzáadunk egy nullvektort akkor egy nullvektor marad, amiről meg megállapítottuk már hogy egy SET.

Tehát akkor egymás után kerülnek ki a pakliból a tükörkép-párok. Mivan akkor ha Béla kiveszi C kártyát és SET-et ad. Akkor egy A, B, C kártyahármas adja a SET-et. Viszont ha ez a 3 kártya SET-et ad, akkor az A', B', C' kártyahármas is SET-et ad, és ezek a kártyák nyilvánvalóan ott lesznek az asztalon mivel minden kártya ami kinn van az asztalon annak a tükörképe is Béla köre után. Ez viszont azt jelenti hogy az A', B', C' hármas korábban alkotott SET-et ráadásul Aladár köre után hiszen ő vette ki C'-t. Azaz ez az eset jó.

2.eset Aladár a $(0; 0; 0; 0)$ kártyát veszi el. Ekkor „átnevezzük" a kártyákat úgy, hogy ez ne a $(0, 0, 0, 0)$ legyen és visszavezettük az 1. esethez. Azaz Béla fogja nyerni mindenképp a játékot – ha ügyesen játszik. □

17. feladat (Mezey Dorottya)
Az $1, 2, \ldots, 2014^{2014}$ számok közül Aladár és Boglárka felváltva törölnek le egy számot (Aladár kezd), amíg csak két szám marad. Ha a megmaradó két szám összege négyzetszám, akkor Boglárka nyer, egyébként Aladár. Kinek van nyerő stratégiája?

Farkas Izabella megoldása. Lássuk be, hogy Boglárkának van nyerő stratégiája. Ha a 2014^{2014} darab táblán levő számot tudjuk pontosan $1007 \cdot 2014^{2013}$ darab párba rendezni úgy, hogy mindegyik szám pontosan egy pár tagja és bármely 2 párban levő szám összege négyzetszám, akkor mindig, amikor Aladár letöröl egy számot, akkor Boglárka letörli a szám párját, így végül a két megmaradó szám egy párt alkot, ezért az összegük négyzetszám.

Lássuk be teljes indukcióval, hogy ha $k \in \mathbb{N}^+$, akkor minden $8k$ alakú szám esetén megvalósítható a korábban leírt párosítás. $8 \mid 2014^{2014}$, tehát ha ez az állítás igaz, akkor Boglárka valóban mindig győzni tud. Mivel $1+8=2+7=3+6=4+5=9=3^2$, ezért $k=1$ esetén biztosan teljesül ez a feltétel.

Tegyük fel, hogy 1-től m-ig már minden pozitív egész esetében beláttuk, hogy igaz az állítás. Lássuk be, hogy ekkor $(m+1)$-re is teljesül a feltétel. $(m+1)$ esetén az első $8(m+1)$ pozitív egészt kell párba állítanunk.

Tegyük fel, hogy van olyan páratlan négyzetszám, amely nagyobb, mint $8(m+1)$, de nem nagyobb, mint $8(m+1)+(8m+1)=16m+9$. Minden páratlan négyzetszám 1 maradékot ad 8-cal osztva, ezért ekkor van egy olyan p pozitív egész, amelyre $8p+1 < 8(m+1)$ és $(8p+1)+(8(m+1))$ éppen ezzel a páratlan négyzetszámmal egyenlő. Ekkor, mivel $p < m+1$, ezért az első $8p$ darab pozitív egész számot párba tudjuk rendezni a feltételnek megfelelően. Emellett pedig, mivel $(8p+1)+(8(m+1))$ négyzetszám, ezért $(8p+1)$-től $8(m+1)$-ig is párba tudjuk állítani az egészeket, hiszen minden q egészt, amely legalább $(8p+1)$ és legfeljebb $8(m+1)$, $(8p+1)+(8(m+1))-q$-val állítunk párba. Tehát ha van megfelelő páratlan négyzetszám $(m+1)$ esetében, akkor $(m+1)$-re is teljesül az állítás.

Lássuk be indirekten, hogy minden $(m+1)$ esetén van megfelelő páratlan négyzetszám. Tegyük fel, hogy van olyan $(m+1)$, amelyre nincs ilyen páratlan négyzetszám. Azaz nincs olyan páratlan négyzetszám, amely nagyobb, mint $8(m+1)$ és kisebb, mint $(16m+10)$. Vagyis van egy olyan r pozitív egész, amelyre $(2r-1)^2$ kisebb, mint $8(m+1)$ és $(2r+1)^2$ nagyobb, mint $(16m+10)$.

Szóval

$$(2r-1)^2 < 8(m+1) \quad \text{és} \quad (2r+1)^2 > 16m+10$$

A két egyenlőtlenséget megfelelő módon összeadva

$$\begin{aligned}
(2r-1)^2+16m+10 &< 8(m+1)+(2r+1)^2 \\
4r^2-4r+1+16m+10 &< 8m+8+4r^2+4r+1 \\
8m+2 &< 8r \\
m &< r \\
m+1 &\leq r
\end{aligned}$$

Becsüljük r-t alulról $(m+1)$-gyel. Ekkor

$$\begin{aligned}
(2(m+1)-1)^2 &< 8(m+1) \\
4m^2+4m+1 &< 8m+8 \\
4m^2-4m+1 &< 8 \\
(2m-1)^2 &< 8
\end{aligned}$$

Mivel $m=1$ esetén már tudjuk, hogy teljesül az állítás, ezért $m \geq 2$, így $(2m-1)^2 \geq (2\cdot 2-1)^2 = 9 > 8$. Vagyis ellentmondásra jutottunk, ezért kell hogy legyen megfelelő páratlan négyzetszám, és emiatt Boglárkának van nyerő stratégiája. □

3. Geometria

18. feladat (Világi Áron)
Adott a síkon n darab pont. Mutassuk meg, hogy kiválasztható közülük három – mondjuk A, B és C – úgy, hogy $ABC\sphericalangle \leq 180°/n$.

Rubint Gergő megoldása. Vegyük az n darab pont konvex burkát, ez egy legfeljebb n csúcsú konvex sokszög lesz. Az ismert, hogy egy szabályos n szög szögeinek nagysága $\frac{(n-2)}{n} \cdot 180°$. Ebből következik, hogy minden n szögnek lesz egy legalább ekkora szöge, és így nyilvánvalóan egy n-nél kevesebb csúcsú sokszögre is igaz lesz ez. Tehát az n pont konvex burkának megfelelő sokszögnek is lesz (legalább) egy maximum ekkora szöge.

Vegyük ennek a szögnek a csúcsát, és húzzunk belőle egy félegyenest a maradék $n-1$ pont mindegyikén keresztül. Így a legalább $\frac{(n-2)}{n} \cdot 180$ fokos szöget felosztottuk $n-2$ részre (ha két félegyenes egybe esik, akkor úgy vesszük, hogy 0°-os szöget zárnak be egymással). Ebből viszont következik, hogy biztosan lesz két olyan félegyenes, melyek legfeljebb $\frac{1}{n-2} \cdot \frac{(n-2)}{n} \cdot 180 = \frac{1}{n} \cdot 180$ fokos szöget zárnak be egymással. Ebből pedig nyilvánvalóan következik, hogy a pont, amelyből a félegyeneseket húztuk, és a két kiválasztott félegyenest megadó pontok megfelelő A, B és C pontok lesznek (megfelelő sorrendben). □

19. feladat (Bognár András Károly)
A koordináta-rendszer egy pontját racionális pontnak nevezzük, ha mindkét koordinátája racionális szám. Bizonyítsuk be, hogy egy körön akkor lehet csak 2-nél több racionális pont, ha a pontok száma $4k$ alakú.

Seres-Szabó Márton megoldása. Megmutatjuk, hogy három racionális pont által kifeszített háromszög köréírt körének közepe is racionális.

Két racionális pont által kifeszített egyenes egyenlete fölírható racionális együtthatókkal (egy racionális együtthatókat tartalmazó lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk), két racionális pont felezőpontja szintén racionális (a koordináták számtani közepét kell vennünk), így két pont szakaszfelező merőlegesének egyenlete is fölírható racionális együtthatókkal (a 90°-os forgatás csak együtthatók cseréje és előjelek megváltoztatása).

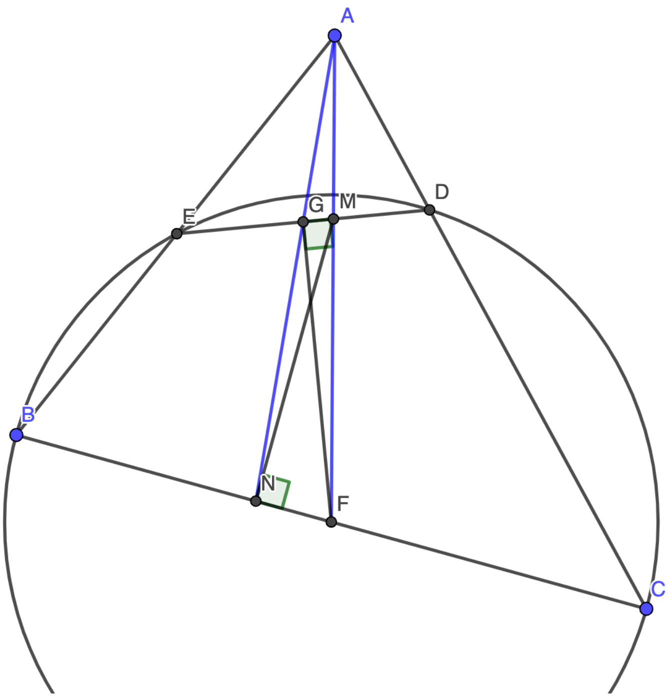
Ezzel a három pont racionális együtthatójú szakaszfelező merőlegeseinek metszéspontja valóban egy racionális pont lesz. (Szintén lineáris egyenletrendszert kell csak megoldani.)

Így a kör közepéből egy körön lévő racionális pontba mutató vektor racionális vektor lesz (minden koordinátája racionális), és 90°-kal való elforgatás is racionális marad (koordináta csere és előjelezgetés). Vagyis tetszőleges körön lévő racionális pont 90°, 180° és 270°-kal (pozitív irányban) való elforgatotja a kör közepe körül, szintén körön lévő különböző racionális pont lesz.

Ezzel a körön lévő racionális pontokat négyes csomagokba rendeztük, világos, hogy minden ponthoz tartozik egy csomag és minden ponthoz egyértelmű a csomagja. Vagyis a körön lévő racionális pontok száma $4k$ alakú. □

20. feladat (Farkas Iza)
A hegyesszögű ABC háromszög B, ill. C csúcsából induló magasságvonalának talppontja D, ill. E, a BC oldal felezőpontja F. Az AF és DE szakaszok metszéspontja M, az M pontnak a BC szakaszra eső merőleges vetülete N. Bizonyítsuk be, hogy az AN szakasz felezi a DE szakaszt.

Nádor Benedek megoldása. Legyen G a DE szakasz felezőpontja.



Ekkor az eredeti állítással ekvivalens az, hogy $MNC\sphericalangle = 90°$, ha N-et $AG \cap BC$-ként definiáljuk. Ezt fogjuk belátni.

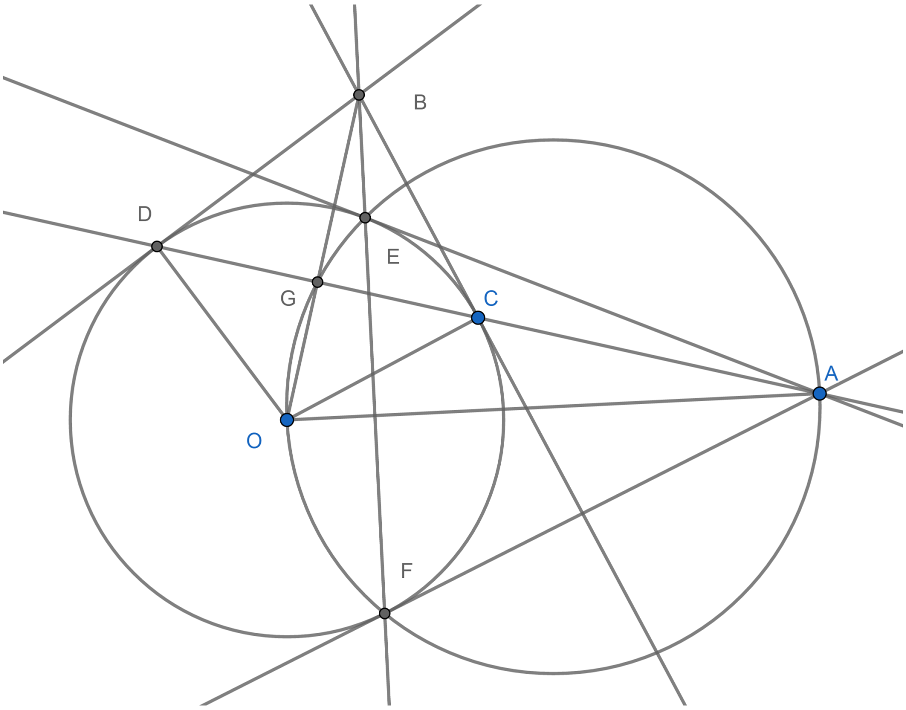
$AED\triangle \sim ACB\triangle$, mert a szögeik megegyeznek (A-nál triviálisan, $AED\sphericalangle = 180° - BED\sphericalangle = BCA\sphericalangle$, mert $BCDE$ húrnégyszög.). Emiatt $EAG\sphericalangle = CAF\sphericalangle$.

Szögszámolással belátjuk, hogy $GMFN$ húrnégyszög. Először is $ANB\sphericalangle = 180° - EAG\sphericalangle - ABC\sphericalangle$ miatt $GNF\sphericalangle = EAG\sphericalangle + ABC\sphericalangle$.

$GMF\sphericalangle = AMD\sphericalangle = 180° - ADM\sphericalangle - DAM\sphericalangle = CDM\sphericalangle - DAM\sphericalangle$. De $BCDE$ húrnégyszög, így $CDM\sphericalangle = 180° - CBE\sphericalangle$. Ezért $GMF\sphericalangle = 180° - CBE\sphericalangle - DAM\sphericalangle = 180° - ABC\sphericalangle - EAG\sphericalangle = 180° - GNF\sphericalangle$, vagyis $GMFN$ húrnégyszög. $BCDE$ kör középpontja F (90° szögek miatt Thalész-kör), így DE húr felezőmerőlegese FG, azaz $DGF\sphericalangle = 90°$. Ekkor $FNM\sphericalangle$ is 90°, mert mindkét szög az FM húrhoz tartozó kerületi szög. Ezzel beláttuk.

□

21. feladat (Molnár-Szabó Vilmos)
(La Hire tétele) Adott egy k kör és egy A pont a körön kívül. Bizonyítsd be, hogy bárhogy húzunk A-n keresztül egy k-t metsző egyenest (ℓ), a két metszéspontban állított érintők metszéspontja (B), és az A-ból húzott két érintő talppontjai egy egyenesbe esnek.



Bognár András Károly megoldása. A k kör középpontja legyen az O pont, az ℓ egyenes metssze a k kört a C és D pontokban. A k körhöz A-ból húzott érintők érintési pontjai legyenek E és F. A bizonyítandó állítás szerint az E, F és B pontok egy egyenesen vannak.

Vegyük fel az OA átmérőjű m kört. Ez a kör átmegy az E és F pontokon a Thalész-tétel miatt, hiszen az érintő merőleges az érintési ponthoz húzott sugárra (jelen esetben $OE \perp AE$ és $OF \perp AF$).

Ekkor az FE egyenes a k és az m körök hatványvonala lesz, vagyis a bizonyítandó állítás azt mondja ki, hogy a B pont rajta van ezen a hatványvonalon. Ennek igazolásához elég azt belátni, hogy a B pont hatványa a két körre ugyanakkora.

B definíciója szerint BD érinti a k kört, ezért B pont k körre vonatkozó hatványa BD^2.

Már csak B pont m-re vonatkoztatott hatványát kell kiszámítanunk. Ehhez húzzuk be a BO szakaszt, ez másodjára metssze a CD szakaszt a G pontban. Ez a G pont ugyanakkor rajta lesz az m körön, mert az OGA szög derékszög lesz ($BCOD$ deltoid, mert BC és BD érintőszakaszok, OC és OD sugarak, és a deltoid átlói, BO és CD merőlegesek egymásra).

Tehát a B pont m-re vonatkozó hatványa éppen $BG \cdot BO$.

A BCO és BCG háromszögek hasonlóak, megfelelő oldalaik arányát felírva (CBG szögük közös, míg a BCO, valamint BGC szögek derékszögek):

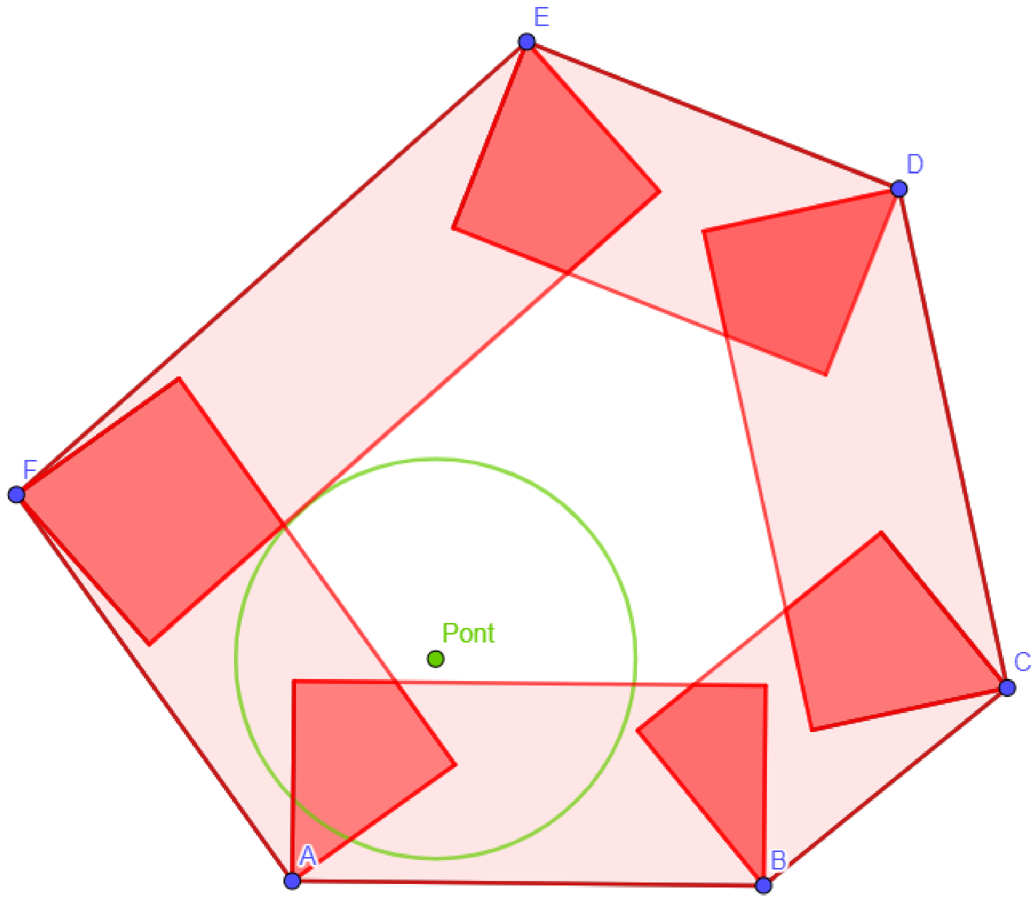
$$\frac{BG}{BC} = \frac{BC}{BO},$$

ahonnan $BG = BC^2 \cdot BO$, vagyis B pont m-re vonatkozó hatványa $BG \cdot BO = BC^2$

Ezzel pedig beláttuk a feladat állítását. $\square$

22. feladat (Bognár András Károly)
Mutassuk meg, hogy egy T területű és K kerületű konvex sokszögben el lehet helyezni egy $\frac{T}{K}$ sugarú kört.

Fey Dávid megoldása. Nézzük meg a test azon belső pontjait, ahova nem lehet lerakni ilyen kört. Ezt úgy tudjuk megtenni, hogy megnézzük azokat a pontokat, amik az oldalaktól $\frac{T}{K}$ távolságra vannak, vagyis az oldalakra befelé állítunk egy $\frac{T}{K}$ oldalhosszú téglalapot. Ha van olyan pont, amely egyik téglalapban sincs benne, akkor oda le tudjuk rakni a kört. Akkor nincs ilyen pont, ha a téglalapok teljesen lefedik a sokszög területét.



Legyenek a téglalap oldalai, $o_1, o_2, o_3 \ldots$. Így $\sum o_i = K$.

A téglalapok területösszege: $\sum o_i \frac{T}{K} = T$. Így ha a téglalapok csak akkor fedhetik le a sokszöget, ha nincs köztük átfedés. Mivel konvex a sokszög, van konvex szöge, és minden konvex szögnél két téglalap között lesz átfedés. Így lesz olyan belső pont is amit nem fednek le a téglalapok – ezt választva egy $\frac{T}{K}$ sugarú kör középpontjának, a kör a sokszög beljsejében helyezkedik el. □

4. Számelmélet

23. feladat (Dánffy Ábel)
Bizonyítsuk be, hogy ha $1 \le k, l < n$ egészek, akkor $\binom{n}{k}$ és $\binom{n}{l}$ nem relatív prímek.

A feladat így is fogalmazható: a Pascal-háromszög egy sorában (a szélső 1-eseket leszámítva) semely két szám nem relatív prím.

Bán-Szabó Áron megoldása. Először lássunk be egy lemmát, ami igencsak megkönnyíti a dolgunkat.

Lemma. A $k \leqslant l \leqslant n$ pozitív egészekre

$$\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}.$$

A Lemma bizonyítása. Tegyük fel, hogy egy asztalnál n darab gonosz ember ül. Ezen emberek közül mi tetszőlegesen felállíthatunk l darab embert és az álló emberek közül k darabot felpofozhatunk. Hányféle módon tudjuk ezt megtenni?

Nos, először is az l álló embert pontosan $\binom{n}{l}$ féleképpen tudjuk kiválasztani. Minden álló l-eshez $\binom{l}{k}$ féleképpen tudunk felpofozni k embert. Így a válasz

$$\binom{n}{l} \cdot \binom{l}{k}.$$

Másrészt viszont először ki tudom választani azt a k embert akit fel akarok pofozni. Ezt persze $\binom{n}{k}$ módon tehetem meg. Ennek a k embernek mindenképp állnia kell, így a maradék $l-k$ álló embert a megmaradt ülő $n-k$ ember közül kell kiválasztani. Mivel az utóbbit $\binom{n-k}{l-k}$ féleképpen tehetem meg, a válasz ugyanarra a kérdésre

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{l-k}.$$

Ezzel beláttuk a lemmát. □

Most térjünk rá a feladatra. Indirekt módon tegyük fel, hogy az $1 \leqslant k \leqslant l < n$ egészekre az $\binom{n}{k}, \binom{n}{l}$ számok relatív prímek. A lemma szerint $\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}$. Ám ekkor $\binom{n}{k} \mid \binom{n}{l}\binom{l}{k}$, azaz az indirekt feltevés szerint $\binom{n}{k} \mid \binom{l}{k}$. Ám tudjuk, hogy $l < n$, így $\binom{l}{k} < \binom{n}{k}$ (hiszen több elemből többféleképpen tudok kiválasztani ugyanannyit). Ez ellentmondás (nagyobb szám nem oszthat kisebbet). □

24. feladat (Fey Dávid)
Bizonyítsuk be, hogy ha p és q relatív prímszámok, akkor:

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3p}{q} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor =$$

$$= \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2q}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3q}{p} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{(p-1)q}{p} \right\rfloor = \frac{(q-1)(p-1)}{2}$$

Fleiner Zsigmond megoldása. Tekintsük a következő egyenlőséget ($0 \le b < p$):

$$\left\lfloor \frac{ap+b}{p} \right\rfloor = \frac{ap+b}{p} - \frac{b}{p}$$

Vegyük észre, hogy mivel a p, q számok relatív prímek, ezért $p, 2p, 3p, \dots, (q-1)p$ kiadja (a 0 kivételével) az összes maradékot q-val osztva. Ezek után $\left\lfloor \frac{ap}{q} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r_a q + m_a}{q} \right\rfloor$, ahol $0 < m_a < q$

Most ennek segítségével írjuk fel az egész összeget.

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{p}{q} + \frac{2p}{q} + \dots + \frac{(q-1)p}{q} - \left(\frac{m_1}{q} + \frac{m_2}{q} + \dots + \frac{m_{q-1}}{q} \right)$$

Az fent leírtakból tudhatjuk, hogy $\{m_1, m_2, \dots, m_{q-1}\} = \{1, 2, \dots, p-1\}$, így mindent tudunk szummázni.

$$\frac{p}{q} + \frac{2p}{q} + \dots + \frac{(q-1)p}{q} - \left(\frac{1}{q} + \frac{2}{q} + \dots + \frac{q-1}{q} \right) = \frac{p \cdot \left(\frac{(q-1)q}{2} \right)}{q} - \frac{(q-1)q}{2q} = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

Ezt a logikai szimmetria miatt ugyan így meg lehet csinálni akkor is, ha a q van a számláálóban és a p a nevezőben. Így a feladatot beláttuk. $\square$

25. feladat (Seres-Szabó Márton)
Tegyük fel, hogy a, b, n, k pozitív egészek, n páratlan, $p > 2$ prímszám és $a^n + b^n = p^k$. Igazoljuk, hogy n a p-nek nemnegatív egész kitevős hatványa.

Móra Márton vette észre, hogy ez a feladat gyorsan következik az alábbi – középiskolában ritkán előkerülő – tételből.

Zsigmondy-tétel
Ha a és b relatív prím pozitív egészek számok, akkor bármely $n \geq 1$ pozitív egész számhoz tartozik olyan p prímszám (ezt *primitív prímosztó*nak nevezzük), amely osztója az $a^n + b^n$ számnak, de egyetlen pozitív egész $k < n$ esetén sem osztója az $a^k + b^k$ számnak, kivéve egyetlen kivételes esetet: $a = 2$, $b = 1$, $n = 3$.

A Zsigmondy-tétel egyébként $a^n - b^n$-ről is megfogalmaz egy hasonló állítást, ld. https://hu.wikipedia.org/wiki/Zsigmondy-tétel.

Móra Márton megoldása. Mivel n páratlan, $a^n + b^n$-ból kiemelhető $a + b$. Mivel a és b is pozitív egészek, nem lehet az összegük p^n-nek az 1 osztója, tehát biztosan p hatvány az összegük.

A Zsigmondy-tétel miatt azonban $a^n + b^n$-nek mindig van primitív prím osztója, a $2^3 + 1^3 = 9 = 3^3$ esetet leszámítva. Mivel p^k-nak csak p a prím osztója, ami a fentiek alapján osztja $a + b$-t is, vagy $a = 2$, $b = 1$ (vagy fordítva) és $n = 3$, $p = 3$, vagyis teljesül az állítás, vagy $a^n = a$ és $b^n = b$, tehát $n = 1$ vagyis szintén igaz az állítás $(1 = p^0)$. Ezzel igazoltuk a feladat állítását. □

Hogy ne csak ilyen „ágyúval verébre” megoldást lássunk, bemutatunk egy második, közismertebb eszközöket használó bizonyítást is.

Második megoldás. Kezdetben osszuk le a-t és b-t az összes p prímtényezővel (ezekből egyenlő lesz, hiszen a két szám egyszerre osztható, vagy nem osztható p-vel), ekkor a jobb oldal is p^n-nel osztódik, tehát igaz marad az egyenlőség. Tehát feltehetjük, hogy $(a, p) = 1$ és $(b, p) = 1$. Továbbá azt is feltehetjük, hogy $n > 1$ (különben nyilvánvalóan teljesül a feladat állítása).

Mivel n páratlan, $a^n + b^n$-ból kiemelhető $a + b$. Mivel a és b is pozitív egészek, nem lehet az összegük p^n-nek az 1 osztója, tehát biztosan p-hatvány az összegük, legyen ez p^v.

Ekkor

$$a^n + b^n = a^n + (p^v - a)^n = p^{nv} + \binom{n}{1} p^{(n-1)v} a + \ldots + \binom{n}{n-2} p^{2v} a^{n-2} + \binom{n}{n-1} p^v a^{n-1}$$

A kibontott összegben az utolsó kivételével mindegyik összeadandóból kiemelhető p^{v+1}. Mivel $a^n + b^n$ is osztható p^{v+1}-nel (itt használjuk, hogy $n > 1$), így az utolsó, $\binom{n}{n-1} p^v a^{n-1}$ összeadandónak is oszthatónak kell lennie p^{v+1}-nel. Tehát, mivel $(a, p) = 1$, így $\binom{n}{n-1} = n$ biztosan osztható p-vel. Legyen $n = p \cdot n_1$.

Ekkor az eredeti egyenlőség a következő alakba írható át: $(a^p)^{n_1} + (b^p)^{n_1} = p^k$, ahol a^p és b^p nyilván továbbra is relatív prím marad p-hez, n_1 páratlan, mint n (és pozitív egész is), míg k nem változott, tehát ez egy ugyanolyan típusú egyenlet, mint a kezdeti.

Tehát $n_1 = p \cdot n_2$, $n_2 = p \cdot n_3$, stb... Ez egy végtelen leszállás (azaz ellentmondás), kivéve, ha valamilyen ℓ-re $p_\ell = 1$, ami éppen azt jelenti, hogy $n = p^\ell$.

Éppen ezt akartuk bizonyítani. □

4.1. Hatványösszeg, modulo p

A tábor egyik leginkább emlékezetes feladatának bizonyult a következő:

26. feladat (Fleiner Zsigmond)

Adott egy p prím és $1 \leq k < p-1$ egész. Bizonyítsd be, hogy $p \mid \sum_{i=0}^{p-1} i^k$.

Első megoldás. Ez a megoldás a primitív gyök fogalmára épül. Felhasználjuk a következő híres tételt.

Tétel: Ha p prím, akkor létezik primitív gyök modulo p.
(Azaz: létezik olyan g pozitív egész szám, amelyre $1, g, g^2, g^3, \ldots, g^{p-1}$ csupa különböző maradékot ad p-vel osztva – ekvivalensen: minden 0-tól különböző maradék megjelenik köztük.)

Vegyünk egy ilyen g primitív gyököt. Ekkor mivel modulo p nézve az $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ és az $\{1, g, g^2, g^3, \ldots, g^{p-1}\}$ halmaz megegyezik

$$\sum_{i=0}^{p-1} i^k \equiv \sum_{i=1}^{p-1} i^k \equiv \sum_{j=0}^{p-2} \left(g^i\right)^k \equiv \sum_{j=0}^{p-2} \left(g^{ik}\right) \mod p$$

A mértani sor összeképlete szerint

$$\sum_{j=0}^{p-2} \left(g^{ik}\right) = \frac{g^{(p-1)k} - 1}{g - 1}.$$

Itt a számláló a kis Fermat-tétel miatt biztosan osztható p-vel, míg a nevező nem. Ezzel beláttuk a bizonyítandó állítást □

Második megoldás vázlata. Jelölje $\mathbb{F}_p$ a p-elemű testet (ezt alkotják a p-vel való osztási maradékok).

$\mathbb{F}_p$-ben az $x^{p-1} - 1$ polinomnak az $1, 2, \ldots, p-1 \in \mathbb{F}_p$ mind gyöke a kis Fermat-tétel miatt. Így ezek a gyökök mind kiemelhetők, és mivel éppen fokszámnyian vannak, ki is adják $x^{p-1} - 1$ gyöktényezős felbontását:

$$x^{p-1} - 1 = (x-1)(x-2)\cdots(x-(p-1))$$

A Vieta-formulák megadják az $1, 2, \ldots, p-1$ elemi szimmetrikus polinomjainak értékét: mind 0, kivéve a szorzatukat.

Ismert, hogy az összes szimmetrikus polinom felépíthető az elemi szimmetrikus polinomokból összeadással, kivonással és szorzással. Egy $(p-1)$-nél kisebb fokú szimmetikus polinom ilyen felépítésében nyilván csak $(p-1)$-nél kisebb fokú elemi szimmetrikus polinomok jöhetnek szóba.

Így mivel az előbb láttuk, hogy az $1, 2, \ldots, p-1$ számok minden legfeljebb $(p-1)$-nél kisebb fokú elemi szimmetrikus polinomjának értéke 0 $\mathbb{F}_p$-ben így ezen számok minden legfeljebb $(p-2)$-ed fokú szimmetrikus polinomjának értéke is 0 lesz $\mathbb{F}_p$-ben – azaz speciálisan az $1^k + 2^k + \ldots + (p-1)^k$ összegé is. □

Egy harmadik bizonyítás következik az alábbi tételből, amelynek bizonyítása tanári feladatként került kitűzésre a táborban.

4.1.1. Összegpolinomok

27. feladat (Tanári – Hujter Bálint)
Legyen k egy rögzített pozitív egész szám.
a) Bizonyítsd be, hogy ekkor létezik egy olyan $f_k(x)$ egész együtthatós polinom, amelyre minden n pozitív egész szám esetén teljesül, hogy

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = f_k(n)$$

b) Bizonyítsd be, hogy a $f_k(x)$ polinomból kiemelhető az $x(x+1)$ szorzótényező (azaz 0 és -1 is gyökei).

Megoldás. Tekintsük minden k pozitív egészre az

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}$$

k-adfokú polinomot (ennek persze minden $n \geq k$ pozitív egész helyen megegyezik a helyettesítési értéke a megfelelő binomiális együtthatóval).

Lemma: Minden k pozitív egész esetén léteznek olyan $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k$ egész együtthatók, amelyekkel:

$$x^k = a_k\binom{x}{k} + a_{k-1}\binom{x}{k-1} + \ldots + a_1\binom{x}{1}$$

Az állítás bizonyítása. Az a_i együtthatókat $b_i \cdot i!$ alakban keressük, ahol b_i még mindig egész szám. Könnyen látható, hogy $p_i(x) = i! \cdot \binom{x}{i} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-i+1)$ polinom minden i-re egész együtthatós, i-ed fokú, a főegyütthatója 1 és a konstans tagja 0. Tehát olyan b_i együtthatókat keresünk, amelyekkel:

$$x^k = b_k p_k(x) + b_{k-1}p_{k-1}(x) + \ldots + b_1 p_1(x)$$

Rekurzív módon határozzuk meg a $b_k, b_{k-1}, b_{k-2}, \ldots, b_2, b_1$ együtthatókat, ebben a sorrendben. Legyen $b_k = 1$ (azaz $a_k = k!$), ekkor mivel $p_{k-1}, p_{k-2}, \ldots, p_1$ polinomok k-nál kisebb fokúak, ezért ezzel garantáltuk, hogy a jobb oldalon x^n együtthatója 1 lesz. $\ell < k$ esetén a b_ℓ-t úgy határozzuk meg, hogy megnézzük, hogy mi az x^k monom együtthatója a $b_n p_n + b_{n-1}p_{n-1} + \ldots + b_{\ell+1}p_{\ell+1}$ polinomban (ez egy egész szám, hiszen minden p_i egész együtthatós és minden b_i is egész), és ennek ellentettjét választjuk b_ℓ-nak. Mivel p_ℓ-ban az x^ℓ együtthatója 1, míg $p_{\ell-1}, \ldots, p_1, p_0$ mind ℓ-nél kisebb fokú, ezzel garantáltuk, hogy x^ℓ együtthatója 0 lesz a jobb oldalon. □

Felhasználva a lemmát, az $f_k(n) = n^k + (n-1)^k + (n-2)^k + \ldots + 1^k$ összeg átírható így:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_k\binom{n}{k} & + & a_{k-1}\binom{n}{k-1} & + & \ldots & + & a_1\binom{n}{1} & + & a_0 & + \\
a_k\binom{n-1}{k} & + & a_{k-1}\binom{n-1}{k-1} & + & \ldots & + & a_1\binom{n-1}{1} & + & a_0 & + \\
a_k\binom{n-2}{k} & + & a_{k-1}\binom{n-2}{k-1} & + & \ldots & + & a_1\binom{n-2}{1} & + & a_0 & + \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \\
a_k\binom{1}{k} & + & a_{k-1}\binom{1}{k-1} & + & \ldots & + & a_1\binom{1}{1} & + & a_0 &
\end{array}$$

Oszloponként összegezve a Pascal-háromszög „zokni-szabályának”, azaz a közismert

$$\binom{n}{r}+\binom{n-1}{r}+\binom{n-2}{r}+\cdots+\binom{r}{r}=\binom{n+1}{r+1}$$

azonosságnak segítségével, ezt kapjuk:

$$f_k(n)=a_k\binom{n+1}{k+1}+a_{k-1}\binom{n+1}{k}+\ldots+a_1\binom{n+1}{2}$$

Ez minden n pozitív egész számra teljesül, tehát az alábbi egyenlet két oldalán álló polinom is azonos (hiszen végtelen sok helyettesítési értékük megegyezik):

$$f_k(x)=a_k\binom{x+1}{k+1}+a_{k-1}\binom{x+1}{k}+\ldots+a_1\binom{x+1}{2}$$

Használva az lemma bizonyításában bevezetett $a_i=i!\cdot b_i$ és

$$p_i(x)=i!\cdot\binom{x}{i}=x(x-1)(x-2)\cdots(x-i+1)$$

jelöléseket, a fenti egyenletet átírhatjuk így:

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \frac{b_k}{k+1}p_k+\frac{b_{k-1}}{k}p_k+\ldots+\frac{b_i}{i+1}p_i+\ldots+\frac{b_1}{2}p_2= \\ &= (x+1)x\underbrace{\left(\frac{b_k}{k+1}p_{k-2}+\frac{b_{k-1}}{k}p_{k-3}+\ldots+\frac{b_i}{i+1}p_{i-2}+\ldots+\frac{b_1}{2}p_0\right)}_{(k-2)\text{-ed fokú polinom}} \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk mindkét bizonyítandó állítást. □

Második megoldás a ***b)*** *részre.* Ha már tudjuk, hogy az $f_k(x)$ polinom létezik, akkor tekinthetjük ennek különbségpolinomját („diszkrét deriváltját”), a $g_k(x)=f_k(x)-f_k(x-1)$ polinomot.

Az $f_k(x)$ definícója szerint minden pozitív egész n-re $g_k(n)=n^k$, és mivel ezzel végtelen sok helyen meghatároztuk, így $g_k(x)$ polinom csak maga az x^k lehet.

Ekkor $f_k(0)=f_k(1)-g_k(0)=1^k-1^k=0$, és $f_k(-1)=f_k(0)-g_k(-1)=0-0^k=0$, tehát a 0 és a -1 is gyöke az $f_k(x)$ polinomnak. □

4.1. *megjegyzés.* A táborban szóba került még az $f_k(x)$ polinom néhány további érdekes tulajdonsága:

1. $f_k(x)$ nem egész együtthatós, de minden egész helyen egész értéket vesz fel.
2. Ha k páros, akkor $f_k(x)$-ből a $(2x+1)$ tényező is kiemelhető.
3. Ha k páratlan, akkor $f_k(x)$ felírható az $x(x+1)$ polinomjaként is.

Az első állítás következik az első megoldás lemmájából, a másik két állítás pedig szépen bizonyítható a második megoldásban bemutatott módszer továbbgondolásával (a táborban szorgalmi feladat volt).

4.2. Három négyzetszám súlyozott összege modulo p

A 4.1. feladat kapcsán jutott eszébe Németh Balázsnak a következő feladat, mint egy különösen szép és fontos következmény.

28. feladat (Tanári – Németh Balázs)
Adottak az a, b, c egész számok, p pedig egy prímszám. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan x, y, z egész számok, melyekre $p \mid ax^2 + by^2 + cz^2$, de nem mindegyikük osztható p-vel.

Érdemes néhány szóban elmondani, hogy miről is szól, miért is érdekes ez a feladat. Közismert, hogy ha p egy $4k + 3$ alakú prímszám, akkor két négyzetszám összege csak akkor lehet osztható p-vel, ha mindkét négyzetszám külön-külön is osztható p-vel. Másképpen mondva, az $x^2 + y^2 \equiv 0 \mod p$ kongruencia-egyenletnek csak triviális megoldásai vannak.

Mi a helyzet három négyzetszám összegével? Nos, a $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 0 \mod p$ már minden prímre megoldható nemtriviális módon is – ennek az állításnak egy finom erősítését fogalmazza meg a feladat.

Megoldás Bencsik Ádám ötletéből (lejegyezte: Németh Balázs). Vegyük észre, hogy ha a, b, c közül bármelyik osztható p-vel, akkor készen vagyunk – legyen az ahhoz tartozó változó értéke 1, míg a másik kettőé 0. Három esetet különböztetünk meg p négyes maradékától függően:

Első eset: $p = 2$. A föntiek szerint az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $a \equiv b \equiv c \equiv 1$ modulo 2. Ekkor $x = y = 1$, $z = 0$ jó megoldás.

Második eset: $p \equiv 1 \mod 4$. Először gondoljuk meg, hogy adott d, e egész számokra mikor van nemtriviális (u, v) (nem azonosan nulla mod p) megoldása az alábbi kongruenciának:

$$du^2 + ev^2 \equiv 0 \mod p \tag{1}$$

Ha d vagy e osztható p-vel, megint csak könnyen készen vagyunk. Tegyük fel tehát, hogy egyikőjük sem 0 maradékot ad p-vel osztva, ekkor ha van nemtriviális megoldás, akkor v sem lehet osztható p-vel, tehát leoszthatjuk a kongruenciát ev^2-tel:

$$\left(de^{-1}\right)\left(uv^{-1}\right)^2 \equiv -1 \mod p$$

Legyen $k \equiv ed^{-1} \mod p$ és $w \equiv uv^{-1} \mod p$, ezzel a következőt kapjuk:

$$w^2 \equiv -k \mod p$$

Ennek a kongruenciának pontosan akkor van megoldása, ha $-k \equiv -ed^{-1}$ kvadratikus maradék modulo p.

Visszatérve az eredeti kongruenciánkra, speciális alakban fogjuk keresni a megoldásunkat: x, y, z közül az egyik változót nullára állítjuk, és egy ugyanolyan alakú kongruenciát oldunk meg a maradék két változóban, mint (1). Ez a terv pontosan akkor fog működni, ha a $-ba^{-1}$, $-cb^{-1}$ és $-ac^{-1}$ „hányadosok” közül legalább az egyik kvadratikus maradék. Vegyük észre azonban, hogy nem lehet mindegyikük kvadratikus nemmaradék, ugyanis a három szám szorzata kongruens -1 modulo p, ami kvadratikus maradék modulo p (hiszen p egy $4k + 1$ alakú prímszám).

Beláttuk tehát, hogy ebben az esetben mindig lesz nemtriviális megoldás, méghozzá olyan, ahol az egyik változó értéke 0 (modulo p).

Harmadik eset: $p \equiv 3 \mod 4$. Ebben az esetben csődöt mond az előző módszer, ha $-ba^{-1}$, $-cb^{-1}$ és $-ac^{-1}$ egyike sem kvadratikus maradék modulo p, tegyük fel tehát, hogy valóban ez a helyzet. Gondoljuk meg, hogy ha (x, y, z) egy nemtriviális megoldás, akkor semelyik változó értéke sem lehet osztható p-vel, azaz:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 \equiv 0 \mod p$$

ekvivalens a következő kongruenciával:

$$\left(ac^{-1}\right)\left(xz^{-1}\right)^2 + \left(bc^{-1}\right)\left(yz^{-1}\right)^2 + 1 \equiv 0 \mod p$$

Vezessük be a $d \equiv ac^{-1} \mod p$, $e \equiv bc^{-1} \mod p$, $xz^{-1} \equiv u \mod p$ és $yz^{-1} \equiv v \mod p$ jelöléseket. Így tehát (1) helyett most a következő kongruenciára fókuszálunk:

$$du^2 + ev^2 \equiv -1 \mod p \tag{2}$$

Mivel $p = 4k + 3$ alakú, azért -1 kvadratikus nemmaradék modulo p, s ezt egybevetve a feltevésünkkel adódik, hogy d és e kvadratikus maradékok, mondjuk, hogy $d \equiv s^2 \mod p$ és $e \equiv t^2 \mod p$, így (2) a következő alakot ölti:

$$s^2u^2 + t^2v^2 \equiv -1 \mod p$$

Kézenfekvő az $m \equiv su \mod p$ és $n \equiv tv \mod p$ helyettesítés, ezáltal a következőt kapjuk:

$$m^2 + n^2 \equiv -1 \mod p \tag{3}$$

Azt állítjuk, hogy a (3) kongruenciának mindig lesz megoldása m-re és n-re nézve. Ahhoz, hogy ezt belássuk, képzeljük el, hogy valaki leírja sorban egy papírra az $1, 2, \ldots, p-1$ számokat, és alá sorba, hogy az adott szám kvadratikus vagy kvadratikus nemmaradék-e modulo p. Tudjuk, hogy a sor egy kvadratikus maradékkal kezdődik és egy kvadratikus nemmaradékkal zárul, tehát előfordul valamikor, hogy egy l szám kvadratikus maradék, míg $l+1$ kvadratikus nemmaradék. Legyen ekkor $l \equiv m^2 \mod p$; mivel p egy $4k+3$ alakú prím, azért $-(l+1)$ szintén kvadratikus maradék, legyen $-(l+1) \equiv n^2 \mod p$. Ekkor $m^2 + n^2 \equiv -1 \mod p$, azaz (3) teljesül, ahonnan visszafejtve a behelyettesítéseket egy nemtriviális megoldást kapunk az eredeti kongruenciánkra, vagyis a bizonyítást befejeztük. □

A szép megoldás (lejegyezte: Németh Balázs). Ezen megoldás során a legtöbb művelet és egyenlőség modulo p értendő. Jelölje $f(x, y, z)$ az $ax^2 + by^2 + cz^2$ polinomot és vizsgáljuk a következő kifejezést:

$$g(x, y, z) = 1 - f(x, y, z)^{p-1}$$

$g(x, y, z)$ szintén egy polinomfüggvény, és a kis Fermat-tétel miatt az értékkészlete a $\{0, 1\}$ halmaz: $g(x, y, z)$ pontosan akkor 1, ha $f(x, y, z) \equiv 0 \mod p$, egyébként pedig 0. Ez azt jelenti, hogy a következő összeg:

$$\sum_{x=0}^{p-1}\sum_{y=0}^{p-1}\sum_{z=0}^{p-1} g(x, y, z) \tag{2.1}$$

azon (x, y, z) számhármasok számát adja meg mod p, melyekre $f(x, y, z) \equiv 0 \mod p$. Bontsuk fel $g(x, y, z)$-t különböző monomok összegére:

$$g(x,y,z) = 1 - \sum_{\substack{i,j,k\in\mathbb{N} \\ i+j+k=p-1}} d_{i,j,k} x^{2i} y^{2j} z^{2k} \tag{2.2}$$

A $d_{i,j,k}$ együtthatók természetesen függenek a, b, c-től, de pontos értékük lényegtelen. Helyettesítsük be (2.1)-et (2.2)-be:

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{p-1}\sum_{y=0}^{p-1}\sum_{z=0}^{p-1} g(x,y,z) &= \sum_{x=0}^{p-1}\sum_{y=0}^{p-1}\sum_{z=0}^{p-1}\left(1 - \sum_{\substack{i,j,k\in\mathbb{N} \\ i+j+k=p-1}} d_{i,j,k} x^{2i} y^{2j} z^{2k}\right) = \\ &= -\sum_{x=0}^{p-1}\sum_{y=0}^{p-1}\sum_{z=0}^{p-1} \sum_{\substack{i,j,k\in\mathbb{N} \\ i+j+k=p-1}} d_{i,j,k} x^{2i} y^{2j} z^{2k}\end{aligned}$$

Cseréljük meg a szummajeleket:

$$= -\sum_{\substack{i,j,k\in\mathbb{N} \\ i+j+k=p-1}} \sum_{x=0}^{p-1}\sum_{y=0}^{p-1}\sum_{z=0}^{p-1} d_{i,j,k} x^{2i} y^{2j} z^{2k} = -\sum_{\substack{i,j,k\in\mathbb{N} \\ i+j+k=p-1}} d_{i,j,k}\left(\sum_{x=0}^{p-1}\sum_{y=0}^{p-1}\sum_{z=0}^{p-1} x^{2i} y^{2j} z^{2k}\right)$$

Vegyük észre, hogy a belső szumma szorzattá alakítható:

$$= -\sum_{\substack{i,j,k\in\mathbb{N} \\ i+j+k=p-1}} d_{i,j,k}\left(\sum_{x=0}^{p-1} x^{2i}\right)\left(\sum_{y=0}^{p-1} y^{2j}\right)\left(\sum_{z=0}^{p-1} z^{2k}\right) = -\sum_{\substack{i,j,k\in\mathbb{N} \\ i+j+k=p-1}} d_{i,j,k} S_{2i} S_{2j} S_{2k} \tag{2.3}$$

ahol $S_k = \sum_{x=1}^{p} x^k$. A 4.1. feladata alapján tudjuk, hogy az S_ℓ összeg kongruens nullával modulo p hogyha $0 \le \ell < p-1$. Mivel az i, j, k természetes számok összege $p-1$, azért közülük a legkisebb legfeljebb $\frac{p-1}{3}$, ezért a $2i, 2j, 2k$ számok közül valamelyik legfeljebb $2(p-1)/3 < p-1$, tehát a (2.3) összeg tagonként 0.

Beláttuk tehát, hogy az $f(x, y, z) \equiv 0 \mod p$ kongruencia megoldásainak száma osztható p-vel. Mivel az $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ számhármas megoldás, a megoldások száma legalább p, vagyis lesz nemtriviális megoldás □

4.2. *megjegyzés* (Németh Balázs megjegyzései a megoldáshoz). A második megoldás egzisztenciabizonyítás, az első megoldással ellentétben nem ad iránymutatást, hogyan találhatunk egy nem triviális számhármast, viszont éppen emiatt sokkal általánosabb, ugyanis nem használja a kvadratikus maradékok szerkezetét mod p, ezért magasabb fokú, például $ax^3 + by^3 + cz^3$ kifejezések vizsgálatára is alkalmas. (Ugyanakkor gyanítom, hogy az első bizonyítás precíz végiggondolásával pontosan meg lehet mondani, hogy hány megoldása van az eredeti kongruenciának.)

A második megoldás során azt is beláttuk, hogy a megoldások száma osztható p-vel: azaz nemcsak hogy van nemtriviális megoldás, bizonyos értelemben „sok” van belőlük. Ha jobban meggondoljuk, ez egyáltalán nem meglepő: ha ugyanis (x, y, z) megoldás, akkor (tx, ty, tz) szintén megoldás bármilyen t egész számra. (Ez abból következik, hogy $f(x, y, z)$ egy homogén másodfokú polinom: $f(tx, ty, tz) = t^2 f(x, y, z)$.)

Definiáljuk a következő relációt a mod p egészekből álló számhármasok halmazán: $(x, y, z) \sim (x', y', z')$ ha létezik nem nulla $\lambda \in \mathbb{F}_p$ amire $(x', y', z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. Nem nehéz belátni, hogy ez egy ekvivalenciareláció, valamint hogy a $(0, 0, 0)$ elem csak önmagával ekvivalens, míg a többi ekvivalenciaosztály pontosan $p-1$ elemet tartalmaz. A föntiek miatt ha egy számhármas megoldás, akkor az összes vele ekvivalens számhármas is az, tegyük fel tehát, hogy k darab nemtriviális ekvivalenciaosztályból vannak a megoldásaink, ekkor mindent összevetve:

$$1 + k(p-1) \equiv 0 \mod p$$

adódik, mert az összes megoldások száma (1 a triviális megoldás, $k(p-1)$ a többi) osztható p-vel. Ebből a $k \equiv 1 \mod p$ állítást kapjuk.

A második megoldás gondolatmenete a véges csoportok elméletében bontazik ki igazán. Hasonló megfontolásokkal lehet belátni:

- Cauchy tételét, mely szerint ha a p prím osztja a G véges csoport rendjét, akkor van G-nek olyan eleme, melynek rendje pontosan p.
- Ennek általánosítását, az úgynevezett Sylow-tételeket.

5. Valószínűségszámítás

29. feladat (Terjék András)
Alfréd a robot egy gomb megnyomására kiad egy egész számot véletlenszerűen 1 és n között. Várhatóan hányszor kell megnyomnunk Alfrédot, hogy 1 és n között az összes számot kiadja?

Nagy Eszter megoldása. Vizsgáljuk meg, hogy ha már k féle számot kiadott Alfréd, akkor várhatóan hányszor kell még megnyomnunk ahhoz, hogy minden számot megkapjunk. Jelölje x azt, hogy várhatóan hányadik nyomásra kapunk új számot, ha már k számot megkaptunk. Ekkor fleírható, hogy

$$x = \frac{n-k}{n} + \frac{k}{n}(x+1)$$

hiszen $\frac{n-k}{n}$ eséllyel kapunk új számot a következő gombnyomásra, míg $\frac{k}{n}$ eséllyel nem kapunk új számot, ilyenkor várhatóan újabb x nyomás kell egy új számhoz. Az egyenletet megoldva:

$$x - x\frac{k}{n} = \frac{n-k}{n} + \frac{k}{n} = 1, \text{ azaz } x = \frac{n}{n-k}.$$

A teljes várható lépésszám, ami alatt minden számot kidob Alfréd:

$$E = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} = nH_n \quad \text{ahol} \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

□

30. feladat (Móra Márton)
100 elítélt nevét valamilyen sorrendben beleteszik 100 sorszámmal ellátott fiókba. Ezek után az egyszemélyes celláikból egyesével véletlenszerűen behívják a rabokat. Mindegyikük tetszése szerint kihúzhat egyesével 50 fiókot. Ha megtalálta valamelyikben a saját nevét, akkor elvezetik egy külön terembe, ha nem, akkor az összes elítéltet azonnal kivégzik. Végül, ha mindannyian szerencsével jártak, valamennyiüket szabadon engedik. Mutassuk meg, hogy e szabályok ismeretében a rabok ki tudnak dolgozni egy olyan stratégiát, amelyet alkalmazva $\frac{3}{10}$ -nél nagyobb az esélye annak, hogy kiszabadulnak.

Bencsik Ádám megoldása. Jelöljük a rabokat 1-től 100-ig egy-egy pozitív egész számmal. A stratégiánk a következő. Bemegy a terembe az X rab. Kinyitja a x. sorszámú fiókot. Ezután mindig azt a sorszámú fiókot nyitja ki a t. lépésben, amilyen számot talált a $t-1$. lépésben való fiókkinyitásnál. Ezt addig folytatja, amíg megtalálja a saját számát, vagy lejár az 50 lépése és akkor vége a játéknak. Nézzük meg alaposabban, mi is történik pontosan.

Elképzelhetjük úgy is hogy 1-100-ig minden pozitív egész kap egy sorszámot. Jelölje $f(x)$ az x. sorszámú számot. n hosszú körnek nevezem azt, ha $f^n(x) = x$ de $i < n$-re $f^i(x) \neq x$. Triviálisan minden szám pontosan egy körben szerepel, hisz egyértelműen jutunk el egy számig és megyünk tovább, hisz minden lépés egyértelműen determinálja a következőt. Vegyük észre ha minden kör legfeljebb 50 hosszú, akkor készen vagyunk. Tekintve, hogy X ember elkezdi a körét x.-ben és tudjuk, hogy $f^n(x) = x$, ahol $n \leq 50$, azaz legfeljebb 50 lépésből kihúzza a nevét. Viszont ha van benne legalább 51 hosszú kör, akkor ez a stratégia veszít, hisz aki ebben a körben van benne, az nem ér körbe és nem húzza ki a saját számát. Azt fogjuk belátni hogy $\frac{7}{10}$-nél kisebb eséllyel fordul ez elő.

Legalább 51 hosszú körből egyszerre maximum egy lehet (hisz minden szám egy körben szerepel és csak 100 szám van). Azaz egyesével megnézhetjük hányszor fordulhat elő, hogy van egy $51, 52, \ldots, 100$ hosszú kör. Ha van egy $p > 50$ hosszú kör: Akkor $\binom{100}{p}$ féleképpen választhatjuk ki azt a p elemet ami szerepelni fog a körünkben. Ezeknek p!-féle lehetséges sorrendjük van, de mivel egy kört alkotnak p különböző helytől kezdhettük a körön a sorrendet: azaz $\frac{p!}{p}$ féle képpen rendezkedhetnek el. A maradék $100 - p$ szám tetszőleges sorrendben helyezkedhet el egymáshoz képest, kaphatja meg a maradék $100 - p$ sorszámot. Ez $(100 - p)!$ lehetőség. Azaz $p > 50$ kör ennyi féle képpen fordulhat elő:

$$\frac{p! \cdot \binom{100}{p} \cdot (100-p)!}{p} = \frac{100!}{p}$$

Összesen 100! elrendezése van a számoknak, így annak az esélye, hogy van benne legalább 51 hosszú kör, az:

$$\frac{\sum_{p=51}^{100} \frac{100!}{p}}{100!} = \sum_{p=51}^{100} \frac{1}{p} < 6.9$$

Azaz annak az esélye, hogy olyan esetet kapunk ahol működik a stratégia, az nagyobb mint $1 - 0.69 = 0.31 > 3/10$. Kész.

$\square$