Minikurzus 2024. szeptember 24-25.

Gyöngyszemek, számelmélet feladatok OKTV-ről és más versenyekről

1. OKTV 2005.1.5. Jelölje $f(n)$ azoknak az n jegyű pozitív egészeknek a számát, amelyekre igaz, hogy az n számjegyei közt előfordul az 1-es és a 2-es számjegy is. Bizonyítsuk be, hogy $f(n)$ nem lehet négyzetszám, ha $n \geq 2$.

2. OKTV 2005.2.4. Az a, b, c és d egészek olyanok, hogy az ac, $bc+ad$, bd mindegyike osztható az n egésszel.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $bc+ad$ összeg tagjai külön-külön is oszthatók n-nel, azaz $n|bc$ és $n|ad$.

3. OKTV 2006.1.1. Melyek azok a pozitív egészek, amelyeknek pontosan négy pozitív osztójuk van és ezek összege 84?

4. OKTV 2006.2.1. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi összeggel megadott N szám nem prím:

$$N = \left(\sum_{n=1}^{2006} n^n\right) + 2006^{2007}, \quad \text{azaz} \quad N = 1^1 + 2^2 + 3^3 + ... + 2005^{2005} + 2006^{2006} + 2006^{2007}.$$

5. OKTV 2007.1.3. Határozzuk meg, mely a és b egész számokra igaz:

$$\frac{b}{a-1} + \frac{a-4}{b+1} = 1.$$

6. OKTV. 2009.1.3. Melyik az a legnagyobb csupa különböző számjegyet tartalmazó pozitív egész szám, amelynek a számjegyeit tetszőleges sorrendben véve mindig prímszámot kapunk?

7. OKTV 2009.2.2. Bizonyítsuk be, hogy 55 darab egymást követő egész szám négyzetének összege nem lehet négyzetszám.

8. OKTV 2010.1.2. Keressük meg mindazon pozitív egész a és b számokat, amelyekre az alábbi négy állítás közül három igaz, egy pedig hamis:

i) a+1 osztható b-vel; ii) a = 2b + 5; iii) a+b osztható 3-mal; iv) a+7b prímszám.

9. OKTV 2010.2.3. Keressük meg a 2011-nél nagyobb egészek közt a legkisebb olyan S számot, amelyet elosztva a 3, 4, 5, 6, 7 és 8 számokkal, maradékul kétszer kapjuk az 1, 2, 3 számok mindegyikét.

10. OKTV. 2011.1.3. Egy szabályos dobókockát egymás után háromszor feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a három dobott szám szorzata 10-zel osztható?

11. OKTV.2011.2.1. A pozitív egész n szám osztóit nagyság szerint növekedve felírtuk, az első volt az 1. A sorrendben a hatodik lett a 35. Keressük meg azt a legkisebb n értéket, amire ezek teljesülnek.

12. OKTV.2012.2.1. Bizonyítsuk be, ha egy pozitív egész szám első és utolsó jegyének különbsége 5, akkor e szám és jegyeinek fordított sorrendjével felírt szám különbsége osztható 45-tel.

13. OKTV 2013.1.1. Melyek azok a pozitív p és q prímek, amelyekre a

$$p+q, \quad p+q^2, \quad p+q^3, \quad p+q^4$$

számok mindegyike prím?

14. OKTV 2013.1.3. Hány olyan ötjegyű tízes számrendszerbeli pozitív egész szám van, melyben a jegyek szorzata 50-re végződik?

15. OKTV 2013.2.1. Maximum hány egész számot választhatunk ki a

$$J = \{n|1 < n < 121; n \in \mathbb{Z}\}$$

halmazból úgy, hogy közülük bármely kettő relatív prím legyen, ha egyikük sem lehet prím?

16. OKTV 2014.2.4. Határozzuk meg, mely pozitív egész a, b, c számokra teljesül az alábbi egyenlet:

$$a! \cdot b! = a! + b! + c!$$

17. OKTV 2015.1.3. A pozitív egész számok körében négy egymást követő páratlan szám négyzetének az összegét vizsgáljuk. Hány ilyen számnégyes van 1 és 100 között, amelyeknél ez a négyzetösszeg 36-tal osztható?

18. OKTV 2015.2.1. Legyen n pozitív egész szám és jelölje $n!!$ az n-nél nem nagyobb, vele azonos paritású pozitív egész számok szorzatát. Igazoljuk, hogy $2016!! - 2015!!$ osztható 2017-tel.

19. OKTV 2015.2.2. Mekkora lehet az x és y egész számok szorzata, ha

$$(6x)_5 + 4y = 508, \quad \text{és} \quad (6y)_5 - (2x)_7 = 64,$$

ahol az m és k egész számokra $(m)_k$ értéke k-nak az m-hez legközelebbi többbese.

20. OKTV 2015.2.4. Határozzuk meg azokat a pozitív p prímszámokat, amelyekre az alábbi tört értéke négyzetszám:

$$\frac{2^{p-1}-1}{p}.$$

21. OKTV 2016.2.3. Határozzuk meg, mely a, b, c nemnegatív egész számok esetén teljesül:

$$3^a + 17 \cdot 4^b = c^2.$$

22. OKTV 2017.1.2. A pozitív egészekből álló $d_1, d_2, ..., d_k$ sorozatot az n osztóláncának nevezzük, ha $d_1 = 1$ és $d_k = n$, továbbá a sorozat minden tagja -az utolsó kivételével- osztója a következő tagnak. Például $n = 6$ esetén három ilyen osztólánc van, ezek az 1,6; 1,2,6; és az 1,3,6. Hány osztólánc van, ha (a) n= 1024; (b) n=999; (c) n=1000?

23. OKTV 2017.2.4. Vegyünk 31 különböző pozitív prímszámot és adjuk össze a negyedik hatványaikat. Igazoljuk, hogy ha a kapott szám osztható 30-cal, akkor a prímszámok között szerepel három egymást követő prím (azaz $p < q < r$ úgy, hogy a $]p;q[$ és $]q;r[$ nyílt intervallumokban nincsenek prímszámok).

24. OKTV 2018.1.5. Mi lehet az a pozitív egész szám, amelynek összesen 10 pozitív osztója van, ebbe beleszámoltuk az 1-et és magát a számot is, és ennek a tíz számnak az összege 34364?

25. OKTV 2018.2.2. Az 1, 2, ..., n számok közül kiválasztható-e úgy egy k szám, hogy az alábbi M kifejezés értéke négyzetszám legyen, ha (a) $n = 2019$; (b) $n = 2020$?

$$M = \frac{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot ... \cdot n!}{k!}$$

26. OKTV 2018.3.1. Legyenek $a_1 < a_2 < ... < a_n$ pozitív egészek. Legyen továbbá $b_i = [a_i; a_{i+1}]$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$, ahol $[a_i; a_{i+1}]$ az a_i és a_{i+1} számok legkisebb közös többszörösét jelöli.
(a) Lehetséges-e, hogy $b_1 > b_2 > b_3 > b_4$?
(b) Lehetséges-e, hogy $b_1 = b_2 = b_3 = ... = b_{99} = b_{100}$?
(c) Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + ... + \frac{1}{b_{n-1}} < 1.$$

27. OKTV 2019.2.3. Határozzuk meg, mely egész n és m számokra teljesül az alábbi egyenlet:

$$n^5 + n^4 = 7^m - 1.$$

28. OKTV 2019.3.1. Melyek azok a 2020-nál kisebb pozitív egész s számok, amelyekre minden egész n esetén $4n+1$ és $sn+1$ relatív prímek, azaz legnagyobb közös osztójuk 1?

29. OKTV 2020.2.4. Legyen n pozitív egész. Vegyünk $2n$ darab különböző prímszámot, jelölje szorzatukat L. Tekintsük azon pozitív egész $a < b$ számokat, amelyekre a osztója b-nek és b osztója L-nek. Igazoljuk, hogy ezen (a, b) párok száma 5-tel osztható.

30. OKTV 2021.1.4. Tekintsük az 1,2,..., 10 számokat valamilyen sorrendben, jelölje őket $a_1, a_2, ..., a_{10}$. Legyen

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_1 + a_2, \quad b_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad ..., \quad b_{10} = a_1 + a_2 + ... + a_{10}.$$

Hányféle olyan $a_1, a_2, ..., a_{10}$ sorrend van, ahol a b_1, b_2, ..., b_{10} számok közül egyik sem osztható 3-mal?