2. feladat

A p és q pozitív számokra $p+q\leq 1$. Igazoljuk, hogy bármely m,n pozitív egészekre $(1-p^m)^n+(1-q^n)^m\geq 1$.

Első megoldás: Egy m sorból és n oszlopból álló táblázat minden egyes elemét egymástól függetlenül p valószínűséggel pirosra, q valószínűséggel kékre és $1-p-q$ valószínűséggel zöldre festjük. Ekkor $1-p^m$ annak a valószínűsége, hogy egy adott oszlop nem teljesen piros, $(1-p^m)^n$ azé, hogy egyik oszlop sem teljesen piros, tehát $1-(1-p^m)^n$ annak a valószínűsége, hogy van csupa piros elemből álló oszlop. Hasonlóan, $1-(1-q^n)^m$ annak a valószínűsége, hogy van csupa kék elemből álló sor. Mivel ezek egymást kizáró események, ezért a két valószínűség összege legfeljebb 1, azaz $[1-(1-p^m)^n]+[1-(1-q^n)^m]\leq 1$, ami átrendezve éppen a feladat állítása.

Második megoldás: Ha $p+q<1$, akkor növeljük pl. q értékét addig, amíg $p+q=1$-et el nem érjük. Ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala csökkent. Ennek alapján elegendő az egyenlőtlenséget a $p+q=1$ esetre igazolni.

Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $m=n=1$, akkor a $p+q\leq 1$ (igaz) összefüggés adódik. Most tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség teljesül valamely m,n értékpárra, és vezessük le ebből, hogy $m,n+1$ és $m+1,n$ esetén is fennáll. Mivel m és n szerepe szimmetrikus, ezért elég az elsőt belátnunk.

Az indukciós feltevés szerinti $(1-p^m)^n+(1-q^n)^m\geq 1$ egyenlőtlenséget $(1-p^m)$-mel szorozva és mindkét oldalhoz p^m-t hozzáadva $(1-p^m)^{n+1}+(1-q^n)^m-((1-q^n)p)^m+p^m\geq 1$ adódik. Mivel a bizonyítandó egyenlőtlenség $(1-p^m)^{n+1}+(1-q^{n+1})^m\geq 1$, ezért elég belátni, hogy $(1-q^{n+1})^m\geq(1-q^n)^m-\big((1-q^n)p\big)^m+p^m$, azaz $(1-q^{n+1})^m+\big((1-q^n)p\big)^m\geq$ $\geq(1-q^n)^m+p^m$.

Ez utóbbi egy $a^m+d^m\geq b^m+c^m$ típusú egyenlőtlenség, ahol $a+d=b+c$ és $a>b>$ $>c>d>0$, hiszen $(1-q^{n+1})+(1-q^n)(1-q)=(1-q^n)+(1-q)$ és $1-q^{n+1}>1-q^n>$ $>1-q>(1-q^n)(1-q)$. Az $a+d=b+c=2H$ jelöléssel $a=H+x$, $b=H+y$, $c=H-y$, $d=H-x$, ahol $x>y>0$, így valóban

$$\begin{aligned}
a^m+d^m &= (H+x)^m+(H-x)^m= \\
&= 2\left(H^m+\binom{m}{2}H^{m-2}x^2+\binom{m}{4}H^{m-4}x^4+\ldots\right)> \\
&> 2\left(H^m+\binom{m}{2}H^{m-2}y^2+\binom{m}{4}H^{m-4}y^4+\ldots\right)= \\
&= (H+y)^m+(H-y)^m=b^m+c^m.
\end{aligned}$$

(Az utolsó lépést az $f(z)=z^m+(H-z)^m$ függvény deriváltjának vizsgálatával is el lehet végezni.)