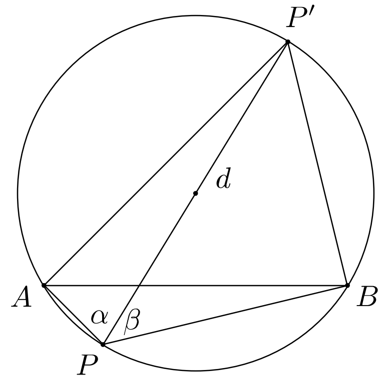
1. feladat
A P pont végigfut egy kör félkörnél rövidebb AB ívén. Legyen P' a P-vel átellenes pont a körön. Bizonyítsuk be, hogy $AP' \cdot BP' - AP \cdot BP$ állandó.

Első megoldás: Jelölje d a kör átmérőjét, α az APP' szöget, β pedig a BPP' szöget.



Thalész tétele szerint a PAP' háromszög A-nál, a PBP' háromszög B-nél derékszögű, ezért

$$AP' = d\sin\alpha, \quad BP' = d\sin\beta, \quad AP = d\cos\alpha \quad \text{és} \quad BP = d\cos\beta\,. \qquad \text{(3 pont)}$$

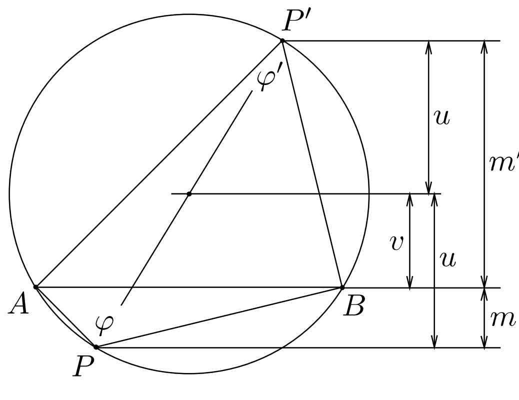
Ezekből

$$AP' \cdot BP' - AP \cdot BP = d^2(\sin\alpha\,\sin\beta - \cos\alpha\,\cos\beta) = -d^2\cos(\alpha+\beta)$$

következik. (2 pont)

Ez a mennyiség valóban állandó, mert a kerületi szögek tétele alapján az $\alpha+\beta$ szög nem függ P helyzetétől az AB íven. (2 pont)

Második megoldás: Jelölje φ az APB szöget, φ' az $AP'B$ szöget, továbbá m és m' a P, illetve a P' pont távolságát az AB egyenestől.



Írjuk föl az ABP és az ABP' háromszög területét kétféleképpen:

$$t_{ABP} = \frac{1}{2}\,AP \cdot BP \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2}\,AB \cdot m$$

$$t_{ABP'} = \frac{1}{2}\,AP' \cdot BP' \cdot \sin\varphi' = \frac{1}{2}\,AB \cdot m' \qquad \text{(3 pont)}$$

Az $APBP'$ húrnégyszögben φ és φ' szemközti szögek, ezért $\sin\varphi = \sin\varphi'$. Ezt felhasználva

$$AP' \cdot BP' - AP \cdot BP = \frac{AB}{\sin\varphi}(m' - m)\,. \qquad \text{(2 pont)}$$

A φ szög nem függ P-től a kerületi szögek tétele miatt. Mivel P és P' átellenes pontok a körön, egyenlő u távolságra vannak az AB-vel párhuzamos átmérőtől. Ezért $m = u - v$ és $m' = u + v$, ahol v a középpont és az AB egyenes távolsága. Így $m' - m = 2v$ szintén nem függ P-től. (2 pont)