3. Legyenek $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2014}$ 1-nél kisebb pozitív valós számok, melyek szorzata A, valamint legyen $A_i = \frac{A}{a_i}$, $i \in \{1; 2; ...; 2014\}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$1 < \frac{1}{\log_{a_1}(a_1a_2)} + \frac{1}{\log_{a_2}(a_2a_3)} + ... + \frac{1}{\log_{a_{2014}}(a_{2014}a_1)} < \frac{1}{\log_{A_1} A} + \frac{1}{\log_{A_2} A} + ... + \frac{1}{\log_{A_{2014}} A}$$

Megoldás: A bizonyítandó egyenlőtlenség jobboldalát átalakítjuk a logaritmus azonosságait felhasználva:

$$\frac{1}{\log_{A_1} A} + \frac{1}{\log_{A_2} A} + ... + \frac{1}{\log_{A_{2014}} A} = \log_A A_1 + \log_A A_2 + ... + \log_A A_{2014} =$$

$$= \log_A A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{2014} = \log_A A^{2013} = 2013 \qquad 1 \text{ pont}$$

Alakítsuk át a középen álló kifejezést is:

$$\frac{1}{\log_{a_1}(a_1a_2)} + \frac{1}{\log_{a_2}(a_2a_3)} + ... + \frac{1}{\log_{a_{2014}}(a_{2014}a_1)} = \frac{1}{1 + \log_{a_1} a_2} + \frac{1}{1 + \log_{a_2} a_3} + ... + \frac{1}{1 + \log_{a_{2014}} a_1}$$

Legyen $b_1 = \log_{a_1} a_2$, $b_2 = \log_{a_2} a_3$, ..., $b_{2013} = \log_{a_{2013}} a_{2014}$ és $b_{2014} = \log_{a_{2014}} a_1$. Ekkor

$$\frac{1}{1 + \log_{a_1} a_2} + \frac{1}{1 + \log_{a_2} a_3} + ... + \frac{1}{1 + \log_{a_{2014}} a_1} = \frac{1}{1 + b_1} + \frac{1}{1 + b_2} + ... + \frac{1}{1 + b_{2014}}$$

Áttérve más alapra $b_i = \dfrac{\ln a_{i+1}}{\ln a_i}$ alakból következik, hogy $b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_{2014} = 1$. 1 pont

Ezt a szorzatot bontsuk egymás utáni párok szorzatára: $(b_1b_2) \cdot (b_3b_4) \cdot ... \cdot (b_{2013}b_{2014}) = 1$. Mivel a párok szorzata 1, ezért van olyan k és l amelyekre $b_{2k-1}b_{2k} \leq 1$ és $b_{2l-1}b_{2l} \geq 1$.

1 pont

Használjuk ki, hogy a feladatban megadott számok 1-nél kisebb pozitív számok, ezért $b_i > 0$ (i=1,2,...,2014). Ezzel a kitűzött egyenlőtlenség első részét igazolni tudjuk, hiszen:

$$\frac{1}{1 + b_1} + \frac{1}{1 + b_2} + ... + \frac{1}{1 + b_{2014}} > \frac{1}{1 + b_{2k-1}} + \frac{1}{1 + b_{2k}} = \frac{2 + b_{2k-1} + b_{2k}}{1 + b_{2k-1} + b_{2k} + b_{2k-1}b_{2k}} \geq 1$$

2 pont

Hátra van még a következő bizonyítása:

$$\frac{1}{1 + b_1} + \frac{1}{1 + b_2} + ... + \frac{1}{1 + b_{2014}} < 2013$$

Mindkét oldalt ugyanannyival növelve:

$$\frac{1}{1 + b_1} + \frac{1}{1 + b_2} + ... + \frac{1}{1 + b_{2014}} + \frac{b_1}{1 + b_1} + \frac{b_2}{1 + b_2} + ... + \frac{b_{2014}}{1 + b_{2014}} = 2014 <$$

$$< 2013 + \frac{b_1}{1 + b_1} + \frac{b_2}{1 + b_2} + ... + \frac{b_{2014}}{1 + b_{2014}}$$

Tehát a bizonyítandó:

$$1 < \frac{b_1}{1 + b_1} + \frac{b_2}{1 + b_2} + ... + \frac{b_{2014}}{1 + b_{2014}}$$

Ezt a részt is lezárhatjuk a következő becsléssel:

$$\frac{b_1}{1+b_1}+\frac{b_2}{1+b_2}+...+\frac{b_{2014}}{1+b_{2014}}>\frac{b_{2l-1}}{1+b_{2l-1}}+\frac{b_{2l}}{1+b_{2l}}=\frac{2b_{2l-1}b_{2l}+b_{2l-1}+b_{2l}}{1+b_{2l-1}+b_{2l}+b_{2l-1}b_{2l}}\geq 1$$

2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: A feladatban kitűzött egyenlőtlenség éles. A felső becslés esetén legyen $b_1=b_2=...=b_{2013}=\epsilon$ és $b_{2014}=\epsilon^{-2013}$. Ekkor

$$\frac{1}{1+b_1}+\frac{1}{1+b_2}+...+\frac{1}{1+b_{2014}}=\frac{2013}{1+\epsilon}+\frac{1}{1+\epsilon^{-2013}}$$

Ekkor

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{2013}{1+\epsilon}+\frac{1}{1+\epsilon^{-2013}}=2013$$

Hasonló módon lehet az alsó becslésnél eljárni, csak ekkor ϵ tartson a végtelenhez.