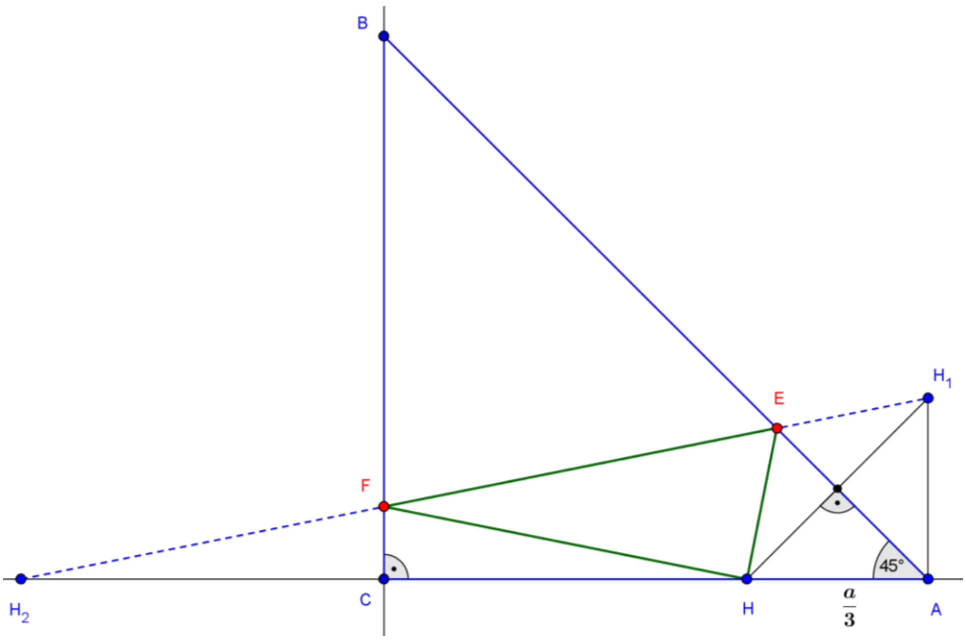
3. **Egy ABC háromszögben $AC = BC = a$ és $ACB\angle = 90°$. Az AC oldal A-hoz közelebbi harmadolópontja H.**
Határozza meg az AB oldalon az E, a BC oldalon az F pontot úgy, hogy az EFH háromszög kerülete a lehető legkisebb legyen!
Adja meg ennek a minimális kerületnek a nagyságát és a $\frac{BF}{FC}$, illetve $\frac{BE}{EA}$ arányok pontos értékét!

1. Megoldás:

Tükrözzük a H pontot először az AB, majd a BC egyenesre, a képpontok rendre H_1 és H_2 (2. ábra). 1 pont



2. ábra

A H_2 pont az AC egyenesen, a H_1 pont pedig az AC egyenesnek az ABC háromszöglappal azonos oldalán van, ezért az ábra alapján a H_1H_2 egyenes az ABC háromszög AB átfogóját és BC befogóját is metszi, a metszéspontok rendre E és F.

A tükrözés távolságtartó tulajdonsága miatt

(1) $$EH = EH_1 \text{ és } FH = FH_2.$$

Mivel 1 pont

$$H_1H_2 = H_1E + EF + FH_2,$$

és az EFH háromszög kerületére

$$K_{EFH} = HE + EF + FH,$$

ezért (1) alapján

(2) $$K_{EFH} = H_1H_2 .$$

1 pont

Nyilvánvaló, hogy a H_1 és H_2 pontok közötti legrövidebb távolság a H_1H_2 egyenesszakasz, így a 2. ábra EFH háromszöge a legkisebb kerületű azon háromszögek közül, amelyeket a feladat feltételei alapján az ABC háromszögbe rajzolhatunk. 1 pont

A tengelyes tükrözés szögtartó tulajdonsága miatt $H_1AE\angle = 45°$, és ezért $H_1AH\angle = 90°$, vagyis H_1A merőleges AC-re. Eszerint a H_1H_2A háromszög derékszögű háromszög.

A tengelyes tükrözés távolságtartó tulajdonsága miatt pedig

(3) $$H_1A = \frac{a}{3} \text{ és } H_2C = \frac{2a}{3} .$$

Felírhatjuk Pitagorasz-tételét a H_1H_2A derékszögű háromszögre:

(4) $$H_1A^2 + H_2A^2 = H_1H_2^{\ 2} .$$

Mivel $H_1A = \frac{a}{3}$ és $H_2A = \frac{5a}{3}$, ezért (4)-ből

$$H_1H_2^{\ 2} = \frac{26a^2}{9} ,$$

vagyis

(5) $$H_1H_2 = \frac{a \cdot \sqrt{26}}{3} .$$

(2) és (5) összevetésével azt kapjuk, hogy a feladat feltételeinek megfelelő legkisebb kerületű háromszög kerülete

$$K_{EFH} = \frac{a \cdot \sqrt{26}}{3} .$$

2 pont

A következőkben meghatározzuk a $\frac{BF}{FC}$ és $\frac{BE}{EA}$ arányok pontos értékét.

A $H_1H_2A\angle$-et metsző H_1A és FC párhuzamos szelőkre felírhatjuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét:

$$\frac{FC}{\frac{a}{3}} = \frac{\frac{2a}{3}}{\frac{5a}{3}},$$

ahonnan a műveletek elvégzése és egyszerűsítés után $FC = \frac{2a}{15}$, innen pedig

$BF = a - FC$ miatt $BF = \frac{13a}{15}$,

és ezért

(6) $$\frac{BF}{FC} = \frac{13}{2}.$$ 2 pont

A H_1AE és FBE háromszögekben $H_1AE\angle = FBE\angle = 45°$, valamint a $H_1EA\angle$ és $FEB\angle$ szögek csúcsszögek, ezért a két háromszög megfelelő szögei páronként egyenlők, tehát a H_1AE és FBE háromszögek hasonlók, így megfelelő oldalaik hosszának aránya is egyenlő. Eszerint

$$\frac{BE}{EA} = \frac{BF}{H_1A},$$

azaz $\frac{BE}{EA} = \frac{\frac{13a}{15}}{\frac{a}{3}}$, ahonnan egyszerűsítés után kapjuk, hogy

(7) $$\frac{BE}{EA} = \frac{13}{5}.$$

(6) és (7) alapján a kérdéses arányok pontos értéke $\frac{BF}{FC} = \frac{13}{2}$ és $\frac{BE}{EA} = \frac{13}{5}$. 2 pont

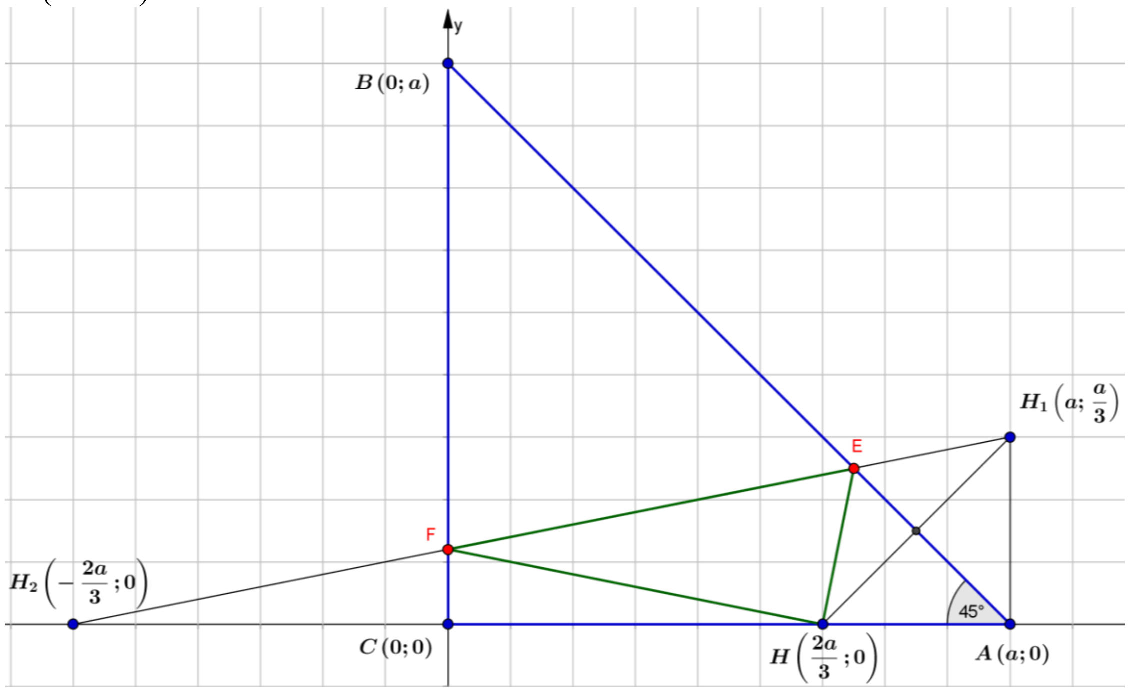
Összesen: 10 pont

2. Megoldás:

az 1. megoldáshoz készített 2. ábrából indulunk ki, azaz tükrözzük a H pontot először az AB, majd a BC egyenesre, a képpontok rendre H_1 és H_2. 1 pont

A megoldás az 1. megoldáshoz hasonlóan folytatódik, addig a megállapításig, hogy a H_1 és H_2 pontok közötti legrövidebb távolság a H_1H_2 egyenesszakasz, így a 2. ábra EFH háromszöge a legkisebb kerületű azon háromszögek közül, amelyeket a feladat feltételei alapján az ABC háromszögbe rajzolhatunk. 3 pont

Ezután az ABC háromszöget olyan derékszögű koordináta-rendszerbe helyezzük, amelynek origója a C pont, az A pont az x tengelyre, a B pont pedig az y tengelyre esik (3. ábra).



3. ábra

Ekkor az ABC háromszög csúcsainak koordinátái $A(a;0)$, $B(0;a)$ és $C(0;0)$, és

$$H_1\left(a;\frac{a}{3}\right) \text{ és } H_2\left(-\frac{2a}{3};0\right).$$ 1 pont

A két pont távolságára vonatkozó képlet alapján

$$H_1H_2=\sqrt{\left(a+\frac{2a}{3}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2}=\frac{a\cdot\sqrt{26}}{3},$$

tehát a minimális kerületű EFH háromszög kerülete

$$K_{EFH}=\frac{a\cdot\sqrt{26}}{3}.$$ 1 pont

Az AB egyenes meredeksége $tg\,135° = -1$ és az egyenes áthalad a $B(0;a)$ ponton, ezért az egyenes egyenlete

(1) $$x + y = a.$$

H_1H_2 egyenes egy irányvektora $\bar{v}\left(\frac{5a}{3};\frac{a}{3}\right)$, illetve az $\frac{a}{3} > 0$ számmal való osztás után $\bar{v}(5;1)$.

Az egyenes áthalad például a $H_2\left(-\frac{2a}{3};0\right)$ ponton, felírhatjuk tehát a H_1H_2 egyenes egyenletét:

(2) $$x - 5y = -\frac{2a}{3}.$$

Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása az E pont koordinátáit adja meg. A számítások elvégzése után:

(3) $$E\left(\frac{13a}{18};\frac{5a}{18}\right).$$

A (2) egyenletbe az $x = 0$ értéket helyettesítve megkapjuk az F pont koordinátáit, amelyek

(4) $$F\left(0;\frac{2a}{15}\right).$$ 2 pont

A két pont távolságára vonatkozó képlet alapján

$$BE = \sqrt{\left(-\frac{13a}{18}\right)^2 + \left(a - \frac{5a}{18}\right)^2} = \frac{13a\cdot\sqrt{2}}{18},$$

illetve

$$EA = \sqrt{\left(\frac{13a}{18} - a\right)^2 + \left(\frac{5a}{18}\right)^2} = \frac{5a\cdot\sqrt{2}}{18}.$$

Eredményeinkből a megfelelő oldalak elosztása után azt kapjuk, hogy

(5) $$\frac{BE}{EA} = \frac{13}{5}.$$

Ugyanakkor (4) szerint $FC = \frac{2a}{15}$, így $BF = \frac{13a}{15}$ és ezért

(6) $$\frac{BF}{FC} = \frac{13}{2}.$$

(5) és (6) alapján a kérdéses arányok pontos értéke $\frac{BF}{FC} = \frac{13}{2}$ és $\frac{BE}{EA} = \frac{13}{5}$. 2 pont

Összesen: 10 pont