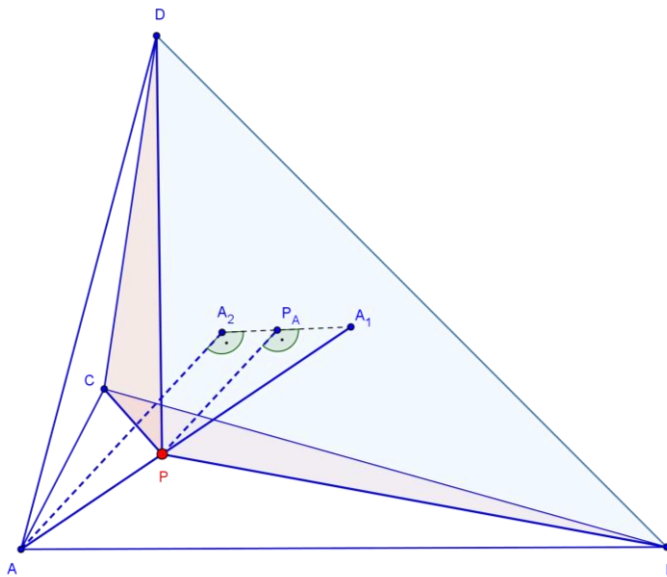


5. Az $ABCD$ tetraéder belsejében vegyünk fel egy P pontot, majd kössük össze a tetraéder csúcsaival. Az $AP;BP;CP$ és DP egyenesek szemközti oldallapokon lévő dőfspontjai rendre: $A_1;B_1;C_1$ és D_1 .
Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{PA_1}{AA_1} + \frac{PB_1}{BB_1} + \frac{PC_1}{CC_1} + \frac{PD_1}{DD_1} = 1!$$

Megoldás:

Legyenek a csúcsok merőleges vetületei a szemközti oldallapon rendre: A_2, B_2, C_2 és D_2 . Az AA_1A_2 háromszög síkjának és a BCD síknak az A_1A_2 metszésvonalára illeszkedik a P pontnak a BCD síkra eső merőleges vetülete, jelöljük ezt a pontot P_A -val (3. ábra).



3. ábra

1 pont

Az AA_2 szakasz az $ABCD$ tetraédernek a BCD laphoz tartozó magassága és ezért az $ABCD$ tetraéder térfogata

$$(1) \quad V_{ABCD} = \frac{T_{BCD} \cdot AA_2}{3}.$$

1 pont

A $P; B; C; D$ pontok egy tetraéder csúcsai, amelynek a BCD lapjához tartozó magassága PP_A , így a $PBCD$ tetraéder térfogatára azt kapjuk, hogy

$$(2) \quad V_{PBCD} = \frac{T_{BCD} \cdot PP_A}{3}.$$

1 pont

Az (1) és (2) összefüggések megfelelő oldalainak arányából adódik, hogy

$$(3) \quad \frac{V_{PBCD}}{V_{ABCD}} = \frac{PP_A}{AA_2}.$$

1 pont

Mivel $AA_2 \parallel PP_A$, ezért a párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt

$$\frac{PP_A}{AA_2} = \frac{PA_1}{AA_1},$$

és így (3)-ból

$$(4) \quad \frac{V_{PBCD}}{V_{ABCD}} = \frac{PA_1}{AA_1}. \quad 2 \text{ pont}$$

Hasonló módon bizonyíthatjuk, hogy

$$(5) \quad \frac{V_{PACD}}{V_{ABCD}} = \frac{PB_1}{BB_1},$$

$$(6) \quad \frac{V_{PABD}}{V_{ABCD}} = \frac{PC_1}{CC_1},$$

végül

$$(7) \quad \frac{V_{PABC}}{V_{ABCD}} = \frac{PD_1}{DD_1}. \quad 2 \text{ pont}$$

A (4)-(7) összefüggések megfelelő oldalainak összeadásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{PA_1}{AA_1} + \frac{PB_1}{BB_1} + \frac{PC_1}{CC_1} + \frac{PD_1}{DD_1} = \frac{V_{PBCD} + V_{PACD} + V_{PABD} + V_{PABC}}{V_{ABCD}}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$V_{PBCD} + V_{PACD} + V_{PABD} + V_{PABC} = V_{ABCD},$$

és ezért

$$\frac{PA_1}{AA_1} + \frac{PB_1}{BB_1} + \frac{PC_1}{CC_1} + \frac{PD_1}{DD_1} = 1,$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani.

2 pont

Összesen: 10 pont