Az ABC háromszögben

$$BC = a; CA = b; AB = c \text{ hosszúságú},$$

és az oldalak hosszaira teljesül, hogy

$$a^3 + b^3 = c^3.$$

Bizonyítsa be, hogy

$$60° < BCA\angle < 90° \,!$$

Megoldás:

Legyen a szokásos jelöléssel $BCA\angle = \gamma$.

A feltételi egyenlőség bal oldalát szorzattá alakítjuk:

(1) $$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 + b^2 - ab).$$ 1 pont

A háromszög-egyenlőtlenség miatt $a + b > c$, ezért a feltétel és (1) figyelembe vételével

$$c^3 > c\cdot(a^2 + b^2 - ab),$$

ahonnan $c > 0$-val való egyszerűsítés után:

(2) $$c^2 > a^2 + b^2 - ab.$$ 1 pont

A koszinusztétel szerint $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$, így (2)-ből

$$a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma > a^2 + b^2 - ab$$

következik, ahonnan rendezés és az $ab > 0$ számmal való osztás után adódik, hogy:

(3) $$\cos\gamma < \frac{1}{2}.$$ 1 pont

Tudjuk, hogy, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, továbbá az $f(x) = \cos x$ függvény a $]0;\pi[$ intervallumban szigorúan monoton csökken, ezért (3) miatt $\gamma > 60°$. 2 pont

b) Másodszor belátjuk, hogy $\gamma < 90°$, vagyis azt, hogy γ hegyesszög.

Indirekt módon bizonyítunk: tegyük fel, hogy $\gamma \geq 90°$, azaz tegyük fel, hogy a háromszög derékszögű, vagy tompaszögű. 1 pont

Ekkor az oldalhosszak négyzeteire teljesül, hogy

(4) $$a^2 + b^2 \leq c^2.$$

Szorozzuk meg a (4) egyenlőtlenség mindkét oldalát $c > 0$-val, ebből adódik, hogy

$$a^2c + b^2c \leq c^3,$$

ahonnan a feladat feltétele szerint:

(5) $$a^2c + b^2c \leq a^3 + b^3.$$ 1 pont

Az (5) egyenlőtlenség átrendezhető a következőképpen:

(6) $$a^2 \cdot (c-a) + b^2 \cdot (c-b) \le 0 .$$ 1 pont

Mivel minden háromszögben a legnagyobb szöggel szemben van a leghosszabb oldal, és az indirekt feltétel szerint γ a háromszög legnagyobb szöge, ezért $c > a$ és $c > b$.

Eszerint a (6) egyenlőtlenség bal oldala pozitív, ezért (6) nem állhat fenn. 1 pont

Indirekt feltételünk tehát nem teljesülhet, azaz valóban

$$\gamma < 90° .$$

Eredményeinket egyesítve $60° < \gamma < 90°$, és ezzel a feladat állítását bizonyítottuk. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: a (4) összefüggés bizonyítható például a koszinusztétellel is.