Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza egész szám.
Igazolja, hogy a háromszög az egyik csúcsán átmenő két egyenessel három egyenlő területű részre vágható úgy, hogy a kapott részek területének mérőszáma is egész szám!

1. Megoldás:

A derékszögű háromszög befogói az a és b, a háromszög területe

$$T = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Igazolnunk kell, hogy a terület harmadrésze, vagyis

$$\frac{T}{3} = \frac{a \cdot b}{6}$$

egész szám, ha a, b, c egész. Vagyis azt kell bizonyítani, hogy $a \cdot b$ osztható 6 -tal. 2 pont

A feltétel szerint az $a; b; c$ számok egy háromszög oldalai, tehát pozitív egész számok.

A pozitív egész számok 3-mal való osztási maradékai a $-1; 0; 1$ számok lehetnek.

Mivel a Pitagorasz-tétel érvényes a, b, c -re, ezért

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Figyelembe véve, hogy $a; b; c$ pozitív számok, valamint, hogy a és b szerepe felcserélhető, az $i; j; k \in N$ jelöléssel, ha

$a = 3i, b = 3j \pm 1$, akkor $a^2 + b^2 = 9i^2 + 9j^2 \pm 6j + 1 = 3m + 1$;

$a = 3i, b = 3j$, akkor $a^2 + b^2 = 9i^2 + 9j^2 = 3m$;

$a = 3i \pm 1, b = 3j \pm 1$, akkor $a^2 + b^2 = 9i^2 \pm 6i + 1 + 9j^2 \pm 6j + 1 = 3m + 2 \quad (m \in N^+)$;

valamint, ha

$$c = 3k \text{, akkor } c^2 = 9k^2 = 3n;$$

illetve, ha

$$c = 3k \pm 1 \text{, akkor } c^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3n + 1 \quad (n \in N^+).$$

Eszerint az $a^2 + b^2 = c^2$ pitagoraszi összefüggés nem állhat fenn, ha

$$a = 3i \pm 1 \text{ és } b = 3j \pm 1.$$

Ezért az $a; b$ egész számok közül legalább az egyik osztható 3 -mal, tehát $a \cdot b$ is osztható 3 -mal. 3 pont

Másrészt a pozitív egész számok 2-vel osztva 0 vagy 1 maradékot adnak, ezért a $p; q; r \in N$ jelöléssel, ha

$a = 2p, b = 2q \pm 1$, akkor $a^2 + b^2 = 4p^2 + 4q^2 \pm 4q + 1 = 4s + 1$;

$a = 2p, b = 2q$, akkor $a^2 + b^2 = 4p^2 + 4q^2 = 4s$;

$a = 2p \pm 1, b = 2q \pm 1$, akkor

$a^2 + b^2 = 4p^2 \pm 4p + 1 + 4q^2 \pm 4q + 1 = 4s + 2 \quad (s \in N^+)$,

valamint, ha

$$c = 2r, \text{ akkor } c^2 = 4r^2 = 4t;$$

illetve, ha

$$c = 2r + 1, \text{ akkor } c^2 = 4r^2 + 4r + 1 = 4t + 1 \quad (t \in N^+).$$

Eszerint a c^2 egész szám 4-gyel osztva nem adhat 2 maradékot, tehát nem lehet a és b mindegyike páratlan szám. Ezért az $a; b$ egész számok közül legalább az egyik osztható 2-vel, tehát $a \cdot b$ is osztható 2-vel. 3 pont

Ha $a \cdot b$ osztható 3-mal és 2-vel, akkor 6-tal is osztható, és ezzel beláttuk, hogy $\frac{T}{3} = \frac{a \cdot b}{6}$ egész szám, vagyis a háromszög valóban három egyenlő területű részre osztható úgy, hogy a részek területe is egész szám. 1 pont

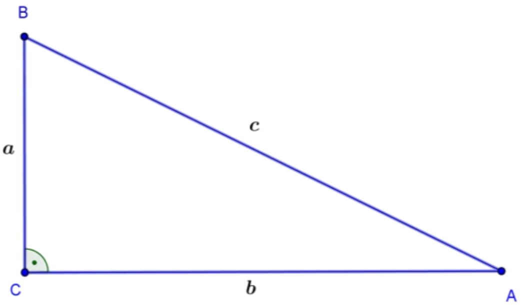
A három egyenlő területű részre osztás meg is valósítható:

ha egy csúcsot összekötünk a szemközti oldal harmadolópontjaival, akkor olyan egyenlő területű részeket kapunk, amelyeknek számértéke egész.

Például, ha $a = 3, b = 4, c = 5$, akkor $m_c = \frac{12}{5}$, $t = \frac{5}{3} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{2} = 2 = \frac{T}{3}$. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás: jelöléseink az 1. ábrán láthatók.



1. ábra

Az a,b befogójú, ABC derékszögű háromszög T területére $T=\frac{a\cdot b}{2}$, ahol $a,b\in N^+$, és ezzel

$$\frac{T}{3}=\frac{a\cdot b}{6}.$$ 2 pont

Azt kell bizonyítanunk, hogy $6|a\cdot b$.

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $2|a\cdot b$ és $3|a\cdot b$ egyszerre igaz, vagyis

$$6|a\cdot b\ldots\Leftrightarrow\ldots 2|a\cdot b \text{ és } 3|a\cdot b.$$

Tudjuk, hogy $2|a\cdot b\ldots\Leftrightarrow\ldots 2|a$ vagy $2|b$, és

$$3|a\cdot b\ldots\Leftrightarrow\ldots 3|a \text{ vagy } 3|b.$$

Tegyük fel először, hogy:

$$a=2k+1,\ b=2l+1 \qquad (k;l\in N).$$

A Pitagorasz-tétel érvényes a,b,c-re, ezért

$$(2k+1)^2+(2l+1)^2=c^2;$$

azaz

$$4(k^2+l^2)+4(k+l)+2=c^2;$$

és így

$$4m+2=c^2 \qquad (m\in N^+),$$

ami lehetetlen, mert a négyzetszámok 4-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot adnak.

Ebből következik, hogy $2|a$ vagy $2|b$ teljesül, és ezért $2 \mid a \cdot b$ is igaz. 3 pont

Tegyük fel másodszor, hogy:

$$a = 3n \pm 1 \text{ és } b = 3p \pm 1 \qquad (n; p \in N).$$

A Pitagorasz-tétel érvényes a, b, c -re, ezért

$$(3n \pm 1)^2 + (3p \pm 1)^2 = c^2;$$

illetve

$$9 \cdot (n^2 + p^2) + 6 \cdot (n \pm p) + 2 = c^2;$$

és így

$$c^2 = 3q + 2 \qquad (q \in N^+).$$

Ez ismét lehetetlen, mert a négyzetszámok 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot adnak.

Ebből az következik, hogy $3|a$ vagy $3|b$, és így $3 \mid a \cdot b$. 3 pont

Mivel $(2;3) = 1$, ezért $2 \mid a \cdot b$ és $3 \mid a \cdot b$ miatt $6 \mid a \cdot b$, ezért $\frac{T}{3} = \frac{a \cdot b}{6}$ egész szám. 1 pont

A három egyenlő területű részre osztás meg is valósítható:
ha egy csúcsot összekötünk a szemközti oldal harmadolópontjaival, akkor olyan egyenlő területű részeket kapunk, amelyeknek számértéke egész.

Például, ha $a = 3, b = 4, c = 5$, akkor $m_c = \frac{12}{5}$, $t = \frac{5}{3} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{2} = 2 = \frac{T}{3}$. 1 pont

Összesen: 10 pont