Melyek azok az $n \in N$ számok, amelyekre

$$2^{2n+2} \cdot 3^{2n} + 1$$

prímszám?

Megoldás:

A hatványozás azonosságainak alkalmazásával a $2^{2n+2} \cdot 3^{2n} + 1$ kifejezést átalakítjuk:

(1) $$2^{2n+2} \cdot 3^{2n} + 1 = 2^2 \cdot 2^{2n} \cdot 3^{2n} + 1 = 4 \cdot 6^{2n} + 1.$$ 2 pont

Ha $n = 0$, akkor az (1)-ben szereplő $4 \cdot 6^{2n} + 1$ kifejezés értéke 5, ez pedig prímszám.

Ezért $n = 0$ a feladat megoldása. 2 pont

Ezután meghatározzuk az $n \in N^+$ feltétel mellett a $4 \cdot 6^{2n} + 1$ kifejezés utolsó számjegyét. 1 pont

A 6 minden pozitív egész kitevőjű hatványa 6-ra végződik. 1 pont

Ebből következik, hogy a $4 \cdot 6^{2n}$ szám 4-re végződik, és így a $4 \cdot 6^{2n} + 1$ kifejezés

utolsó számjegye 5, eszerint pedig $4 \cdot 6^{2n} + 1$ osztható 5-tel. 2 pont

Az $n \in N^+$ feltétel mellett tehát $4 \cdot 6^{2n} + 1 > 5$, másrészt osztható 5-tel, vagyis nem lehet prímszám. 1 pont

Ezért $4 \cdot 6^{2n} + 1$ akkor és csak akkor lesz prímszám, ha $n = 0$, és ekkor $4 \cdot 6^{2n} + 1 = 5$. 1 pont

Összesen: 10 pont