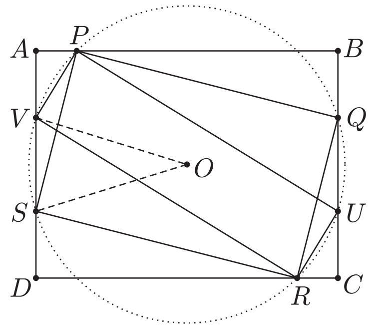
3. Egy téglalapot akkor nevezünk egy másik téglalapba *beírtnak,* ha csúcsai a másik téglalap különböző oldalainak belső pontjai. Egy $ABCD$ téglalapba két téglalapot írtunk, amelyeknek van egy közös csúcsa. Mutassuk meg, hogy a két beírt téglalap területének összege egyenlő az $ABCD$ téglalap területével!

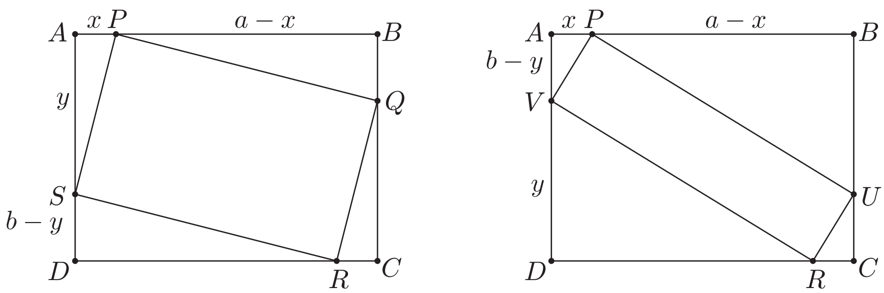
Megoldás. Először megmutatjuk, hogy a beírt téglalapok középpontja szükségszerűen egybeesik az $ABCD$ téglalap középpontjával. Legyen a beírt téglalap AB-re eső pontja P, CD-re eső pontja pedig R. A beírt téglalap középpontja a PR szakasz felezőpontja, ezért rajta van AB és CD középpárhuzamosán. Hasonló érveléssel kapjuk, hogy a szóban forgó középpont BC és DA középpárhuzamosán is rajta van. A két észrevétel együtt azt adja, hogy a beírt téglalap középpontja az $ABCD$ téglalap középpontjával azonos. 2 pont



Legyen a feltételben megadott közös csúcs az AB oldal P belső pontja. Az előző észrevételünk alapján ekkor az az R pont is csúcsa mindkét beírt téglalapnak, amelyet úgy kapunk, hogy P-t tükrözzük az $ABCD$ téglalap O középpontjára.

Thalész tétele miatt a beírt téglalapok csúcsai a PR szakasz, mint átmérő fölé írt körre esnek. Mivel ez a kör legfeljebb két pontban metszheti az AD oldalt, így legfeljebb két különböző beírt téglalap létezik, amelynek P az egyik csúcsa. Továbbá az is igaz, hogy ha a két beírt téglalap AD-re eső csúcsa S és V, akkor SVO egyenlő szárú, ezért S és V az AD oldal felezőpontjára szimmetrikus. 2 pont

Vezessük be az alábbi ábra jelöléseit, és fejezzük ki a beírt téglalapok területét úgy, hogy az $ABCD$ téglalapból levágott derékszögű háromszögek területét összegezzük ($AB = a$, $BC = b$, $AP = RC = x$, $AS = CQ = DV = BU = y$).



A szemközt levágott derékszögű háromszögeket téglalappá egyesítve kapjuk az alábbiakat:

$$T_{PQRS} = ab - xy - (a-x)(b-y) \quad \text{és} \quad T_{PURV} = ab - x(b-y) - y(a-x). \qquad \text{1 pont}$$

Összegezve:

$$\begin{aligned} T_{PQRS} + T_{PURV} &= ab - xy - (a-x)(b-y) + ab - x(b-y) - y(a-x) \\ &= 2ab - \big(xy + (a-x)y + x(b-y) + (a-x)(b-y)\big) \\ &= 2ab - \big(x + (a-x)\big)\big(y + (b-y)\big) \\ &= 2ab - ab = ab = T_{ABCD}. \end{aligned} \qquad \text{2 pont}$$

Összesen: 7 pont