2. Legyen a_n a következő módon definiált sorozat:

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = \dfrac{3}{n} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \quad (n \geqq 1). \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy a_n egész minden n-re, viszont nem teljes hatvány semmilyen n-re (vagyis nem egy egész szám valamely 1-nél nagyobb egész kitevős hatványa)!

Megoldás. A sorozat első néhány tagja:

$$a_2 = \frac{3}{1} \cdot 2 = 2 \cdot 3, \quad a_3 = \frac{3}{2} \cdot (2+6) = 12 = 3 \cdot 4, \quad a_4 = \frac{3}{3} \cdot (2+6+12) = 20 = 4 \cdot 5.$$

A tagok felírása után adódhat az a sejtés, hogy a sorozat megadható direkt módon is, és a képzési szabály: $a_n = n \cdot (n+1)$. 1 pont

Ezt a részeredményt bebizonyítjuk (mondjuk teljes indukcióval).

Lemma: $a_n = n \cdot (n+1)$.

I.) (*Bázis.*) $n = 1$ (2, 3, 4) esetén igaz az állítás, korábban már megvizsgáltuk.

II.) (*Indukciós feltétel.*) Tegyük fel, hogy egy bizonyos pozitív egész k-ig már igazoltuk az állítást, vagyis $a_k = k \cdot (k+1)$.

III.) Kérdés, hogy következik-e, hogy ekkor igaz az állítás $n = k+1$-re is?

Ekkor

$$a_{k+1} = \frac{3}{k} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) = \frac{3}{k} \cdot \big((a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}) + a_k\big).$$

Innen – mivel a definíció szerint $a_k = \dfrac{3}{k-1} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1})$ – a belső zárójel helyettesíthető, vagyis:

$$a_{k+1} = \frac{3}{k} \cdot \left(\left(\frac{k-1}{3} \cdot a_k\right) + a_k\right) = \frac{3}{k} \cdot \left(\frac{k+2}{3} \cdot a_k\right) =$$
$$= \frac{3}{k} \cdot \frac{k+2}{3} \cdot k \cdot (k+1) = (k+1)(k+2).$$

Ezzel a lemmát bebizonyítottuk. 3 pont

Mivel $a_n = n \cdot (n+1)$ két pozitív egész szám szorzata, nyilván maga is egész. 1 pont

Másfelől $a_n = n \cdot (n+1)$ két egymást követő pozitív egész szorzata. Két egymást követő pozitív egész viszont egymáshoz relatív prím. 1 pont

Vagyis, ha egy p prímre $p \mid n$, akkor $p \nmid (n+1)$, és ez fordítva is igaz.

Azaz, ahhoz, hogy $a_n = n \cdot (n+1)$ egy pozitív egész teljes m-edik ($m > 1$) hatványa legyen, az kellene, hogy mind n, mind $(n+1)$ teljes m-edik hatvány legyen.

Viszont két szomszédos pozitív m-edik hatvány között legalább három a különbség, vagyis a_n valóban nem teljes hatvány. 1 pont

Összesen: 7 pont