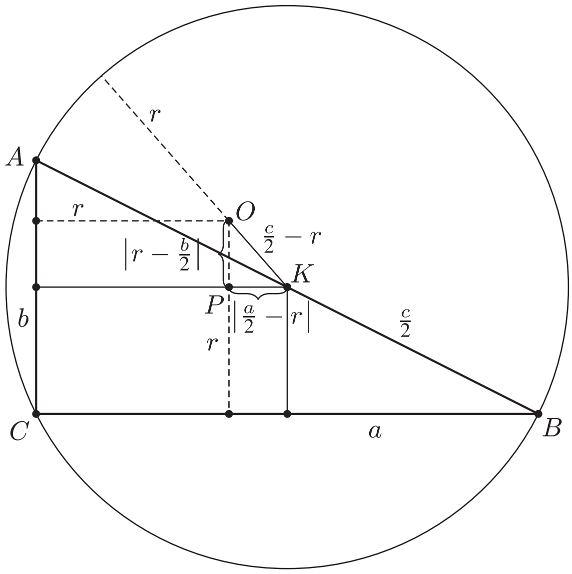
1. Az a és b befogójú derékszögű háromszögnek megrajzoltuk a köré írt körét. Fejezzük ki a és b segítségével annak a körnek a sugarát, amely érinti a háromszög befogóit és a köré írt kört belülről.

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit.



Legyen a derékszögű háromszög átfogójának hossza $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Thalész-tételének megfordítása miatt a köré írt kör középpontja az átfogó K felezőpontja, sugara pedig $\dfrac{c}{2}$. 1 pont

Jelölje a keresett kör középpontját O, sugarát pedig r. Ez belülről érint a köré írt kört, ezért az érintési pont és a körök középpontjai egy egyenesre esnek, vagyis $OK = \dfrac{c}{2} - r$. 1 pont

Az O-ból a-ra állított merőleges egyenes és a K-ból b-re állított merőleges egyenes metszéspontját jelölje P. K pontnak a befogóktól vett távolsága $\dfrac{a}{2}$, illetve $\dfrac{b}{2}$, O pedig mindkét befogótól r távolságra van (hisz a keresett kör érinti azokat), ezért az OPK derékszögű háromszögben $PK = \left|\dfrac{a}{2} - r\right|$ és $OP = \left|r - \dfrac{b}{2}\right|$. (Az előjel attól függően változik, hogy az O pont hová esik K-hoz képest.) 1 pont

Ebben a háromszögben Pitagorasz-tétele szerint:

$$\left(\frac{a}{2} - r\right)^2 + \left(r - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2} - r\right)^2, \quad \text{azaz} \quad \frac{a^2}{4} - ar + r^2 + r^2 - br + \frac{b^2}{4} = \frac{c^2}{4} - cr + r^2,$$

ami rendezés után:

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} + r^2 - r(a + b - c) = 0.$$

2 pont

Az első tag $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ miatt 0, tehát az r-ben másodfokú $r^2 - r(a+b-c) = 0$ egyenletet kapjuk. 1 pont

Ennek két megoldása $r = 0$ és $r = a + b - c$, előbbi nyilván nem megoldás, tehát a keresett kör sugara $r = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$. 1 pont

Megjegyzés: Mivel a derékszögű háromszög beírt körének sugaráról tudjuk, hogy éppen $\dfrac{a + b - c}{2}$, eredményünkből az is következik, hogy a keresett kör épp a derékszögű csúcsból a háromszög beírt körének kétszeresére nagyított képe.

Összesen: 7 pont