

5. Adjuk meg az összes olyan pozitív prímekből álló (p, q, r) számhármast, ahol

a) $q \neq r$, valamint

b) $p^q + p^r$ négyzetszám.

Megoldás. Legyen az általánosság megszorítása nélkül $q < r$.

(Természetesen, ha megkapunk így egy (p, q, r) jó számhármast, akkor (p, r, q) is megoldás lesz.)

Ekkor kiemelve p^q -t: $p^q + p^r = p^q(1 + p^{r-q}) = n^2$ valamely egész n -re. 1 pont

A p^q -nak csak p a prímosztója, de $1 + p^{r-q}$ p -vel osztva 1 maradékot ad, emiatt p^q , illetve $1 + p^{r-q}$ relatív prímek. 1 pont

De mivel n^2 prímfelbontásában a prímszámhatványosztók páros kitevővel szerepelnek, ezért q is páros, vagyis (mivel q prím is) $\rightarrow q = 2$. 1 pont

Vagyis $n^2 = p^q(1 + p^{r-q}) = p^2(1 + p^{r-2})$. Ezt osztva p^2 -tel $\rightarrow 1 + p^{r-2} = \frac{n^2}{p^2} = m^2$ valamely egész m -re.

Innen mindkét oldalból 1-t elvéve, és szorzattá alakítva:

$$p^{r-2} = m^2 - 1 = (m + 1)(m - 1). \quad 1 \text{ pont}$$

Innen két eset lehetséges: vagy $p \mid m - 1$, vagy $1 = m - 1$.

Ha $1 = m - 1$, akkor $2 = m$, és innen $(m + 1)(m - 1) = 3 = 3^1 = p^{r-2}$. Ekkor $p = 3$, és $r = 3$. Vagyis ekkor a lehetséges számhármastok: $(3; 2; 3)$ és $(3; 3; 2)$. 1 pont

Ha pedig $p \mid m - 1$, akkor $p \mid m + 1$ miatt $p \mid (m + 1) - (m - 1) = 2$ is teljesül. Vagyis ekkor $p = 2$.

Mivel ekkor $m - 1$, és $m + 1$ olyan kettőshatványok (hisz $2^{r-2} = (m + 1)(m - 1)$), melyek különbsége 2, emiatt $m - 1 = 2$, és $m + 1 = 4$ lehet csak.

Vagyis $2^{r-2} = 2 \cdot 4 = 8 = 2^3$. Innen $r = 5$.

Vagyis ekkor a lehetséges számhármastok: $(2; 2; 5)$ és $(2; 5; 2)$. 1 pont

Összefoglalva: 4 darab rendezett számhármast felel meg a feltételeknek: $(3; 2; 3)$; $(3; 3; 2)$; $(2; 2; 5)$ és $(2; 5; 2)$. 1 pont

Összesen: 7 pont