**3.** A 2025-re igaz, hogy $2025 = (20 + 25)^2$. Van-e még ilyen négyjegyű szám?

**Megoldás.** Keressük azokat a négyjegyű számokat, melyekre igaz, hogy $\overline{abcd} = (\overline{ab} + \overline{cd})^2$.
Legyen:

$$x = \overline{ab} = 10a + b,$$
$$y = \overline{cd} = 10c + d. \qquad \text{1 pont}$$

Ezekkel a jelölésekkel:

$$\overline{abcd} = 100x + y,$$
$$(\overline{ab} + \overline{cd})^2 = (x + y)^2. \qquad \text{1 pont}$$

A keresett számra vonatkozó egyenlőséget felírva, majd átalakítva:

$$100x + y = (x + y)^2,$$
$$99x = (x + y)^2 - (x + y),$$
$$99x = (x + y)(x + y - 1). \qquad \text{1 pont}$$

Vagyis két szomszédos egész szám szorzatának oszthatónak kell lennie 11-gyel és 9-cel úgy, hogy az $x$ kétjegyű szám legyen. 1 pont

Ez három esetben teljesül: $45 \cdot 44$, $55 \cdot 54$ és $99 \cdot 98$ esetében. 1 pont

A többi esetben ($10 \cdot 11$, $11 \cdot 12$, $21 \cdot 22$, $22 \cdot 23$, $32 \cdot 33$, $33 \cdot 34$, $43 \cdot 44$, $55 \cdot 56$, $65 \cdot 66$, $66 \cdot 67$, $76 \cdot 77$, $77 \cdot 78$, $87 \cdot 88$, $88 \cdot 89$) nem teljesül a 9-cel való oszthatóság, a $99 \cdot 100$ után pedig az $x$ háromjegyű. 1 pont

Tehát a keresett számok:

$$2025 \quad (45 \cdot 44, \quad \text{ekkor} \quad x = 20 \quad \text{és} \quad y = 25),$$
$$3025 \quad (55 \cdot 54, \quad \text{ekkor} \quad x = 30 \quad \text{és} \quad y = 25),$$
$$9801 \quad (99 \cdot 98, \quad \text{ekkor} \quad x = 98 \quad \text{és} \quad y = 01). \qquad \text{1 pont}$$

Összesen: 7 pont