1. 2016-tól kezdve csökkenő sorrendben leírtuk egymás után a pozitív egész számokat, így megkaptuk a 201620152014…10987654321 számot.

a) Hány jegyű ez a szám?

b) Bizonyítsuk be, hogy a szám osztható 3-mal!

Megoldás. a) Leírtunk 9 db 1 jegyű, 90 db 2 jegyű, 900 db 3 jegyű és $2016 - 999 =$ $= 1017$ db 4 jegyű számot. 1 pont

Így a felírt szám $9 + 180 + 2700 + 4068 = 6957$ számjegyből áll. 1 pont

b) A 3-mal való oszthatóságot, illetve az esetleges maradékokat a számjegyek összege mutatja meg. 3 egymás utáni szám közül az egyik 0, a másik 1, a harmadik 2 maradékot ad 3-mal osztva, és ugyanezt adják a számjegyeik összegei is. 1 pont

Így ha 3 egymást követő számot egymás után leírunk, a kapott szám jegyeinek összege 3-mal osztva $0 + 1 + 2$ maradékával egyezik meg, ami 0, azaz a szám mindig osztható lesz 3-mal. 2 pont

A feladatban kitűzött szám számjegyeit hármas csoportokba lehet úgy osztani, hogy minden csoportban a számjegyek összege 0 maradékot adjon, mivel 2016 osztható 3-mal. Így az összes számjegy összege osztható 3-mal, azaz az eredeti szám is. 2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha a tanuló csupán 1-től 2016-ig összeadja a számokat, és ennek az összegnek nézi a hármas maradékát, de nem bizonyítja be, hogy a számok egymás után írásával kapott szám hármas maradéka egyenlő a számok összegének hármas maradékával, akkor a b) rész 5 pontjából két pontot kaphat.