1. Hány olyan tízjegyű természetes szám van, amelyben az 1, 2 és 3 számjegyek mindegyike legalább kétszer szerepel és ezeken a számjegyeken kívül más számjegy nincs a számban?

1. megoldás. Tekintsük azokat a tízjegyű természetes számokat, amelyek az 1, 2 és 3 számjegyeken kívül más számjegyet nem tartalmaznak.

Ezek száma: 3^{10} =59049. 1 pont

Jelölje ezek közül S_i azok számát, amelyekben az i legfeljebb egyszer szerepel ($i = 1, 2, 3$) és $S_{i;j}$ azok számát, amelyekben az i és a j is legfeljebb egyszer szerepel ($i; j = 1, 2, 3$ és $i = j$).

A számjegyek hasonló szerepe miatt: $S_1 = S_2 = S_3$ és $S_{1;2} = S_{1;3} = S_{2;3}$. 3 pont

$S_1 = 10 \cdot 2^9 + 2^{10} = 6144$, mert ekkor az 1-es egyszer vagy egyszer sem fordul elő a számban. 2 pont

$S_{1;2} = 1 + 10 + 10 + 90 = 111$, mert ekkor sem az 1-es, sem a 2-es nem fordul elő vagy az 1-es egyszer és a 2-es nem fordul elő vagy a 2-es egyszer és az 1-es nem fordul elő vagy az 1-es és a 2-es is egyszer fordul elő a számban. 3 pont

Így a logikai szita-formula alapján a kérdezett számok száma:

$$59\,049 - 3 \cdot 6144 + 3 \cdot 111 = 40\,950.$$ 1 pont

2. megoldás(vázlat). Az előforduló 1, 2 és 3 számjegyek gyakorisága szerint négy eset lehet: $6-2-2$, $5-3-2$, $4-4-2$ és $4-3-3$. 1 pont

Ha az egyik számjegy hatszor, a másik kettő kétszer fordul elő, akkor a hatszor előforduló számjegy három-féle lehet, és ha ez pl. az 1-es, akkor azon tízjegyű számok száma, amelyekben 6 db 1-es, 2 db 2-es és 2-db 3-as szerepel pl. az ismétléses permutáció képlete szerint: $\frac{10!}{6!\,2!\,2!} = 1260$. Így $3 \cdot 1260 = 3780$ számot kapunk. 2 pont

A többi esetben rendre 15 120, 9450 és 12 600 számot kapunk. $2-2-2$ pont

Tehát a kérdezett számok száma: $3780 + 15\,120 + 9450 + 12\,600 = 40\,950$. 1 pont