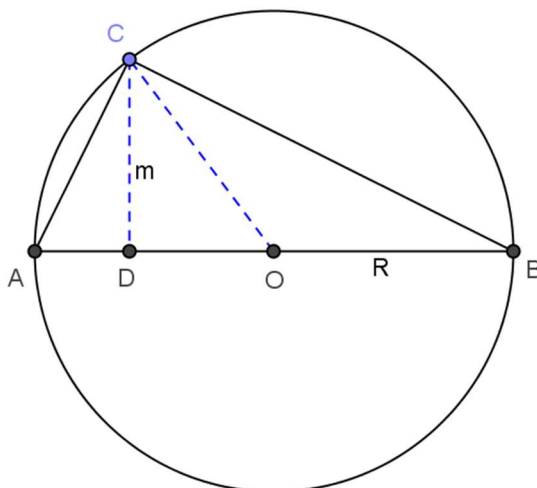


Feladat:

Az $AB = 10$ cm átmérőjű kör kerületének egy C pontjára teljesül, hogy $CA \cdot CB = 40$ cm². Számítsuk ki AC hosszát!

Első megoldás:

Thalész tétele miatt $\angle ACB = 90^\circ$. Legyen az ABC derékszögű háromszögben a hagyományos jelölésekkel $CA = b$, $CB = a$, $AB = c$ (és $c = 2R$), a C -ből húzott magasság pedig $CD = m$ (ábra).



A háromszög területét kétféleképpen is felírhatjuk: $\frac{ab}{2} = \frac{cm}{2}$, innen $m = \frac{ab}{c} = 4$ (cm). Az

ODC derékszögű háromszögben Pitagorasz tételéből (1) $OD^2 = R^2 - m^2 = 9$, ebből $OD = 3$ (cm).

$AD = R - OD = 2$ (cm), végül az ADC derékszögű háromszögben Pitagorasz tételéből

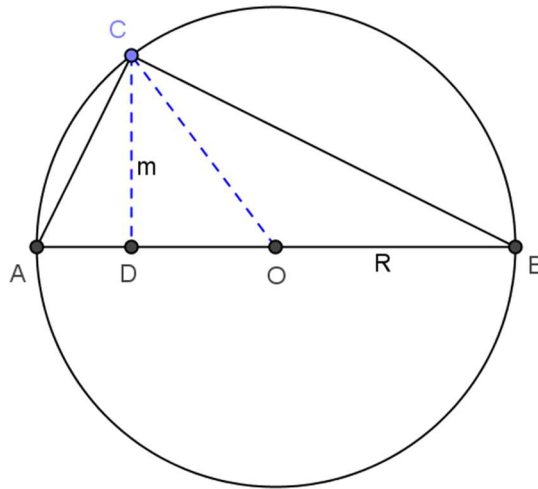
$$CA = \sqrt{AD^2 + m^2} = \sqrt{20} \text{ cm.}$$

Megjegyzés:

Ez a megoldás így még hiányos, az A és B pontok szimmetrikus szerepe miatt (az ábrán A és B felcserélhető) $CB = \sqrt{BD^2 + m^2} = \sqrt{80}$ is megoldást ad. Az algebrai „figyelmeztetést” az (1) egyenletben kapjuk: ebből $OD = \pm 3$ cm adódik, s előjeles szakaszokkal számolva $AD = R \pm 3$ (cm).

Második megoldás:

Thalész tétele miatt $\angle ACB = 90^\circ$. Legyen az ABC derékszögű háromszögben a hagyományos jelölésekkel $CA = b$, $CB = a$, $AB = c$ (és $c = 2R$), a C -ből húzott magasság pedig $CD = m$ (ábra).



A háromszög területét kétféleképpen is felírhatjuk: $\frac{ab}{2} = \frac{cm}{2}$, innen $m = \frac{ab}{c} = 4$ (cm).

Legyen $AD = x$, ekkor a magasságtételből $m^2 = x(2R - x) \Leftrightarrow 16 = x(10 - x) \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$. Az egyenlet megoldásai $x_1 = 2$ és $x_2 = 8$. Az ADC derékszögű háromszögben

Pitagorasz tételéből $CA = \sqrt{x^2 + m^2}$, innen $CA = \sqrt{20}$ vagy $CA = \sqrt{80}$ cm.

Megjegyzés:

A magasságtétel alkalmazása helyett felhasználhatjuk az ABC , ACD , CBD háromszögek hasonlóságát is.

Harmadik megoldás:

Thalész tétele miatt $\angle ACB = 90^\circ$. Legyen az ABC derékszögű háromszögben a hagyományos jelölésekkel $CA = b$, $CB = a$, $AB = c$ (és $c = 2R$). Pitagorasz tételéből $a^2 + b^2 = c^2$, így felírható a következő egyenletrendszer:

$$\left. \begin{array}{l} ab = 40 \\ a^2 + b^2 = 100 \end{array} \right\}$$

Az első egyenletből $b = \frac{40}{a}$, ezt a másodikba írva $a^2 + \left(\frac{40}{a}\right)^2 = 100 \Leftrightarrow$

$a^4 - 100a^2 + 1600 = 0$. Az egyenlet (a^2) -ben másodfokú, a két gyök $a_1^2 = 20$ és $a_2^2 = 80$, és így a keresett szakasz hosszára két megoldást kapunk: $a_1 = \sqrt{20}$ vagy $a_2 = \sqrt{80}$.