

## Érthető matematika tankönyv, 12.o, 13. oldal:

András, Béla és Csaba játék közben betört egy ablakot. Keresték a tettest, és ezért mindegyiküket megkérdezték, hogy kinek a lelkén szárad az ablak betörése. A következő (1)–(3) válaszokat kapták:

- (1) András: Béla volt.
- (2) Béla: Csaba törte be az ablakot.
- (3) Csaba: Nem én törtem be az ablakot.

Ki volt a tettes, ha tudjuk, hogy az ártatlanok igazat mondanak? (A bűnös igazat is mondhat, de hazudhat is.)

### Megoldások

Ebben az egyszerű példában áttekintjük azokat a megoldási módszereket, amelyeket a hasonló feladatokban alkalmazhatunk. A megoldások leírása előtt talán érdemes bevezetni a következő, az állításokat egyszerűbben rögzítő formulákat:

- (1)  $A: B = b$ ;
- (2)  $B: C = b$ ;
- (3)  $C: C \neq b$ .

Ezek jelentése szemléletes. Például (1) „fordítása”: „András azt mondja, hogy Béla bűnös.”

Hasonló rövidítéseket alkalmazhatunk az állítások tartalmára vonatkozóan. Például (1) =  $i$  vagy (2) =  $h$  jelentése: az (1) állítás igaz, a (2) pedig hamis.

S végül a személyek állításának valódiságát is jelölhetjük ugyanígy (feltéve, hogy nem okoz félreértést): Például  $A = i$  vagy  $B = h$  jelentése: András igazat mondott, Béla hazudott.

#### Elő megoldás (hipotézis felállítás, esetszétválasztás)

Ebben a „frontális” megoldásban két esetet különböztetünk meg például  $A$  állításától függően.

1. eset: Tegyük fel, hogy  $A$  igazat mond, azaz szerinte  $B$  a bűnös. Ekkor a (2) állítással  $B$  hazudik (ez nem mond ellent a feltevésünknek), és a (3) állítás is ( $C$  ártatlansága) megerősíti a feltevést. Tehát egy lehetséges megoldás, hogy  $B$  törte be az ablakot.

A tömörebb jelöléssel például a következőt írhatjuk:

Ha  $A = i \Rightarrow (1) = i \Rightarrow B = b \Rightarrow C \neq b \Rightarrow C = i \Rightarrow (3) = i$ .

2. eset: Meg kell még vizsgálni azt a lehetőséget, ha  $A$  hazudik, azaz ő a bűnös. Ekkor állítása szerint  $B$  ártatlan (ez igaz állítás), ezért (2) igaz. Itt ellentmondást kaptunk:  $B$  szerint  $C$  a bűnös, de két bűnös nem lehet.

Vagyis ez az eset nem lehetséges.

#### Második megoldás (logikai kapcsolatok elemzése)

Bonyolultabb feladatokat érdemes azzal kezdeni, hogy az állítások között logikai összefüggéseket keresünk. Ezek megtalálása leszűkíti a lehetőségek számát. Kereshetünk ellentmondó vagy egymást kizáró állításokat, továbbá következmény- vagy ekvivalens állításokat.

Néhány kiindulási lehetőség, ahonnan a megoldás már könnyen befejezhető:

- (1) és (2) ellentmondó állítások, nem teljesülhetnek egyszerre. Legalább egyikük hamis – ezért (3) biztosan igaz. (Tehát rögtön adódik, hogy  $C$  ártatlan.)
- (2) és (3) egymást kizáró állítások, pontosan egyikük igaz. Ebből ismét az következik, hogy a harmadik állítás, (1), csak igaz lehet. (Tehát  $B$  a bűnös.)
- (1)-nek (3) következménye: ha (1) igaz, akkor (3) is. (Sőt azt is megjegyezhetjük, hogy ha (3) nem igaz, akkor (1) sem igaz.)

Itt tulajdonképpen három megoldási lehetőséget mutattunk, ezek igazi haszna (az esetszűkítés) a nehezebb feladatoknál mutatkozik meg.

#### Harmadik megoldás (összes eset megvizsgálása az igazmondók „eloszlása” alapján)

Négy lehetőség adódik az igazmondók számára: vagy valamelyik fiú hazudik (3 eset), vagy mindegyik igazat mond. Ezeket az eseteket rendszeresen végigpróbálva kapjuk az egyetlen megoldást. (Persze a próbálkozások száma jelentősen csökkenthető, ha figyelembe vesszük például a második megoldás megszorításait.)



#### Negyedik megoldás (összes eset vizsgálata a bűnös személye alapján)

Három eset lehet, attól függően, hogy ki a bűnös. Ezeket rendszeresen megvizsgálva kapjuk a megoldást.

#### Megjegyzés

Ne becsljük le az összes eset végigpróbálásán alapuló utolsó két módszert. Egyrészt ez az eljárás *mindig alkalmazható*; másrészt a bonyolultabb feladatokat gyakran csak így lehet befejezni; harmadrészt pedig ez a megoldási módszer könnyen algoritmizálható és számítógépre vihető.

#### Ötödik megoldás (speciális módszerek)

Néha a feladat sajátosságai alapján is szűkítő észrevételeket tehetünk. Ebben a feladatban ilyen például az (1)  $A: B = b$  állítás. Mivel csak egy bűnös van (a feladat specialitása), így ez vagy  $B$ , akire az állítás vonatkozik; vagy  $A$ , aki az állítást teszi. Mindkét esetben kiderül  $C$  ártatlansága.

Vagy ilyen állítás lehetne például  $C: A \neq b$ . Az állítás nem lehet hamis ( $A$  és  $C$  is bűnös lenne), tehát az állítás igaz:  $A$  ártatlan, így igazat mond stb.