Amikor az összeg és a szorzat megegyezik

Leo Kurlandchik és Andrzej Nowiczki munkája alapján fordította:

Csépai András és Kovács Márton

Az $(1,2,3)$ számhármasnak van egy speciális tulajdonsága, mégpedig az, hogy a szorzatuk megegyezik az összegükkel, ugyanis

$$1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

Hasonló tulajdonságokkal rendelkezik például az $(1,1,2,4)$ számnégyes is.

$$1 + 1 + 2 + 4 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4$$

Nézzünk példákat néhány ilyen számötösre is:

$$\begin{aligned} 1+1+1+2+5 &= 1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 5 \\ 1+1+1+3+3 &= 1\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 3 \\ 1+1+1+2+2 &= 1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 2 \end{aligned}$$

Legyen most $n \geq 2$ természetes szám, és keressünk olyan $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ számokat, amelyekre teljesül, hogy:

$$\begin{aligned} &(1) \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \\ &(2) \quad x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \end{aligned}$$

Jelentse $A(n)$ az ilyen szám n-esek halmazát, és jelölje $a(n)$ az $A(n)$ halmaz számosságát, vagyis az $A(n)$ halmaz elemeinek számát.

Példának okáért ha $n = 2$ akkor egyetlen ilyen sorozat létezik, ez pedig a $(2,2)$. Tehát akkor $a(2) = 1$. A fentebb leírt példák az $n = 2,3,5$ esetekre érvényesek. Először megmutatjuk, hogy a fent megadott példákon kívül nem létezik más sorozat ezekben az esetekben.

1. Tétel: $a(3) = 1 \quad a(4) = 1 \quad a(5) = 3$

Bizonyítás:

Először, ha $n = 3$ akkor $x_3 > 0$ egész számmal elosztva a kapott egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} &x_1 x_2 x_3 = x_1 + x_2 + x_3 \leq 3x_3 \\ &x_1 x_2 \leq 3 \end{aligned}$$

Vagyis x_1 és x_2 lehetséges értékei a következők $(1,1), (1,2), (1,3)$. De ezek egyértelműen meghatározzák x_3 értékét, tehát az egyetlen megfelelő számpár az $(1,2)$ amiből $x_3 = 3$ és így kaptuk, hogy $A(3)$-nak egyetlen eleme van, az $(1,2,3)$ számhármas, azaz $a(3) = 1$.

Most, ha $n = 4$ akkor (a számok nem lehetnek egyenlők, ha $n \geq 2$, miért?) $x_1 x_2 x_3 \leq 3$. Ebből a megfelelő számnégyesek $(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3)$. Most x_5 értéke csak akkor felel meg (1)-nek és (2)-nek, hogyha $(x_1, x_2, x_3) = (1,1,2)$ és $x_4 = 4$. Vagyis $a(4) = 1$. Végül, hogyha $n = 5$ akkor az előzőekhez hasonlóan kapjuk, hogy $x_1x_2x_3x_4 \leq 4$, Amiből a lehetséges számnégyesek $(1,1,1,1), (1,1,1,2), (1,1,1,3), (1,1,1,4), (1,1,1,2,2)$. Ezek közül a megfelelő számötösök fentebb láthatók a példában. Ebből kaptuk, hogy $a(5) = 3$.

<u>2. Tétel</u>: Bármely $n \geq 2$ esetén $A(n)$ nemüres.

<u>Bizonyítás:</u>

Az állítás triviális, hiszen $A(n)$ tartalmazza az $(1,1,\dots,1,2,n)$ sorozatot, valamint

$$1 + 1 + \cdots + 1 + 2 + n = (n-2) \cdot 1 + 2 + n = 2n$$
$$1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot 2 \cdot n = 2n$$

Menjünk tovább, és feltételezzük, hogy az $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sorozat eleme $A(n)$-nek. Ekkor

$$x_i x_n \leq x_1 x_2 \dots x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x_n + \cdots + x_n = n x_n$$

Minden $i = 1,2, \dots, (n-1)$-re. Ebből látható, hogy $x_i \leq n$, amiből egyenesen következik, hogy az $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ számok mindegyike kisebb $(n+1)$-nél. Azonban ezek a számok egyértelműen meghatározzák x_n-et, tehát ha adott $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ akkor ki tudjuk számolni x_n-et, az $x_1 x_2 \dots x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ egyenletből, amiből eljutunk a:

<u>3. Tételhez:</u> Bármely $n \geq 2$ természetes számra az $A(n)$ halmaz véges.

<u>Bizonyítás:</u>

Az olvasóra bízzuk. Tegyünk megállapításoka az $A(n)$ és $a(n)$ halmazokra vonatkozóan.

<u>4. Tétel:</u> Ha $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A(n)$ és $n \geq 3$ akkor $x_1 x_2 \dots x_{n-1} \leq n-1$

<u>Bizonyítás:</u>

Vegyük észre, hogy a számok nem lehetnek mind egyenlők. Tegyük fel, hogy mégis, vagyis legyen $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$. Ekkor a feladat feltétele szerint:

$x^n = nx$ amiből $x = \sqrt[n-1]{n}$. De hogyha $n \geq 3$ akkor $1 < \sqrt[n-1]{n} < 2$ és ez nem lehet, hiszen x természetes szám. Vagyis kaptuk, hogy a számok nem lehet mind egyenlők. Akkor viszont

$$x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n < x_n + \cdots + x_n = n x_n$$

Amiből kapjuk, hogy $x_1 x_2 \dots x_{n-1} < n$ azaz $x_1 x_2 \dots x_{n-1} \leq n-1$.

<u>5. Tétel:</u> Bármely s természetes számhoz létezik olyan n természetes szám, hogy $a(n) > s$

<u>Bizonyítás:</u>

Legyen $n = 2^{2s} + 1$ és legyen $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 1$. Hogyha $j \in \{0,1,2, \dots, s\}$, akkor legyen

$$x_{n-1} = 2^j + 1 \text{ és } x_n = 2^{2s-j} + 1$$

Ekkor $x_1 x_2 \dots x_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2^{2s} + 2^{2s-j} + 2^j + 1$ vagyis minden $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sorozat, amelyet a fent definiált módon készítünk, $A(n)$-hez tartozik, és ekkor triviálisan $a(n) = s + 1$.

6. Tétel: Ha $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A(n)$ és $n \geq 2$ akkor $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 2n$. Egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, hogyha $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1,1, \dots, 2, n)$.

Bizonyítás:

Legyen b_n az egyesek darabszáma az egyik ilyen $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A(n)$ sorozatban, valamint legyen k az összes többi (azaz 1-nél nagyobb) elem darabszáma. Jelöljük ezt a k darab elemet a következőképpen $(y_1 + 1), (y_2 + 1), \dots, (y_k + 1)$ Az általánosság megszorítása nélkül azt is feltehetjük, hogy $1 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_k$ Triviális, hogy $k \geq 2$, máskülönben az összeg biztosan nagyobb, mint a szorzat. A jelöléseink miatt az is teljesül, hogy $b_n + k = n$, a feladat feltétele miatt pedig:

$$(1) \quad (y_1 + 1)(y_2 + 1) \dots (y_k + 1) = y_1 + y_2 + \dots + y_k + b_n + k = y_1 + y_2 + \dots + y_k + n$$

Legyen $k = 2$, ekkor $y_1 y_2 = n - 1$ amiért $y_1 + y_2 \leq 1 + n - 1 = n$, s így $x_1 + \dots + x_n = n + y_1 + y_2 \leq 2n$. Egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha $y_1 = 1$ és $y_2 = n - 1$, vagyis ha $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1,1, \dots, 2, n)$.

Legyen most $k \geq 3$. Ekkor (1) maga után vonja, hogy:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + \dots + y_k &\leq y_1 y_2 + y_2 y_3 + \dots + y_k y_1 \\ &< (y_1 + 1)(y_2 + 1) \dots (y_k + 1) - (y_1 + y_2 + \dots + y_k) \\ &= n \end{aligned}$$

Amiért is $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_k + n \leq 2n$. A fenti problémát javasolták az 1990-es lengyel olimpiára.

7. Tétel: Legyen $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A(n)$ és $n \geq 2$. Jelölje b_n az egyesek darabszámát az $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sorozatban. Ekkor

$$b_n \geq n - 1 - [\log_2 n]$$

Ahol egyenlőség akkor állhat fenn, hogyha például $n = 2^s - s$ alakú (ahol $s \geq 2$) és $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(1, \dots, 1, 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{s}\right)$

Bizonyítás:

A 6. tétel maga után vonja, hogy

$$2^{n-b_n} \leq x_1 \dots x_n = x_1 + \dots + x_n \leq 2n$$

Amiért pedig

$$n - b_n \leq log_2(2n) = 1 + log_2 n$$
$$b_n \geq n - 1 - [log_2 n]$$

Hisz $\mathrm{b_n}$ egy egész szám, így a logaritmus alsó egészrészét kell venni. Az egyenlőség esete pedig a bizonyításból nyilvánvalóvá válik.

8. tétel: *Ha n páros és $(x_1, \dots, x_n) \in A(n)$, akkor $x_1 + \cdots + x_n$ osztható 4-gyel.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $x_1, \dots, x_n$ közül mindegyik páratlan. Ekkor páros sok páratlan számunk van. Az $x_1 + \cdots + x_n$ összeg páros és az $x_1 \dots x_n$ szorzat páratlan.

Ebből következően $x_1, \dots, x_n$ közül legalább az egyik páros. Ez azt jelenti, hogy a szorzat páros, következésképp az összeg is páros. Ez azt jelenti, hogy legalább két páros számunk van. Tehát a szorzat, ami egyenlő az összeggel, osztható 4-gyel. ☐

n	$a(n)$	n	$a(n)$	n	$a(n)$	n	$a(n)$	n	$a(n)$	n	$a(n)$	n	$a(n)$	n	$a(n)$	n	$a(n)$	n	$a(n)$
1	1	11	3	21	4	31	4	41	7	51	4	61	9	71	6	81	7	91	6
2	1	12	2	22	2	32	3	42	2	52	3	62	3	72	3	82	4	92	3
3	1	13	4	23	4	33	5	43	5	53	7	63	4	73	9	83	5	93	6
4	1	14	2	24	1	34	2	44	2	54	2	64	4	74	4	84	2	94	3
5	3	15	2	25	5	35	3	45	4	55	5	65	7	75	3	85	10	95	6
6	1	16	2	26	4	36	2	46	4	56	4	66	2	76	3	86	5	96	5
7	2	17	4	27	3	37	6	47	5	57	5	67	5	77	6	87	4	97	6
8	2	18	2	28	3	38	3	48	2	58	4	68	5	78	3	88	5	98	5
9	2	19	4	29	5	39	3	49	5	59	4	69	4	79	5	89	8	99	4
10	2	20	2	30	2	40	4	50	4	60	2	70	3	80	2	90	2	100	5

A fenti táblázat mutatja $a(n)$ egy programmal kiszámolt értékeit, $1 \leq n \leq 100$-ra. Láthatjuk, hogy például $a(50) = 4$ és $a(100) = 5$.

Az $A(50)$ halmaznak pontosan 4 eleme van. Belátható, hogy minden $(x_1, \dots, x_{50})$ sorozatra, ami $A(50)$ eleme, igaz, hogy $x_1 = x_2 = \cdots = x_{47} = 1$ és (x_{48}, x_{49}, x_{50}) a következő hármasok egyike:

$$(1, 2, 50), \quad (1, 8, 8), \quad (2, 2, 17), \quad (2, 5, 6)$$

Az $A(100)$ halmaznak pontosan 5 eleme van. Minden $(x_1, \dots, x_{100})$ elemre, igaz, hogy $x_1 = x_2 = \cdots = x_{95} = 1$ és $(x_{96}, x_{97}, x_{98}, x_{99}, x_{100})$ a következő ötösök egyike:

$$(1, 1, 1, 2, 100), \quad (1, 1, 1, 4, 34), \quad (1, 1, 1, 10, 12), \quad (1, 1, 4, 4, 7), \quad (2, 2, 3, 3, 3)$$

Számítógéppel kiszámolható, hogy $a(1997) = 20$, $a(1998) = 8$, $a(1999) = 16$, $a(2000) = 10$.

A fenti táblázatból látható, hogy 24 a legnagyobb kétjegyű n, amire $a(n) = 1$. Pontosan 3 olyan háromjegyű természetes szám létezik, amire $a(n) = 1$. Ezek: 114, 174 és 444. A szerzők nem tudják a választ a következő kérdésre:

Van-e olyan természetes n, amire $a(n) = 1$ és $n > 444$?

A következőkben bemutatunk néhány állítást $a(n) = 1$ esetében.

9. tétel: *Legyen* $n > 2$. *Ha* $a(n) = 1$*, akkor* $n - 1$ *prím.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $n - 1$ nem prím. Ekkor $n = ab + 1$, ahol a, b természetes számok és $2 \leq a \leq b$. Ekkor pedig az $(1, 1, \dots, 1, 2, n)$ és $(1, 1, \dots, 1, a + 1, b + 1)$ sorozatok különbözőek és elemei $A(n)$-nek. ☐

Ezen tétel következménye, hogy

10. tétel: *Ha* $n \geq 4$ *és* $a(n) = 1$*, akkor* $2|n$. ☐

11. tétel: *Ha* $n \geq 5$ *és* $a(n) = 1$*, akkor* $3|n$.

Bizonyítás: A 9. tételből következik, hogy n nem lehet $3k + 1$ alakú szám. Ha $n = 3k + 2$, akkor az $A(n)$ halmaz tartalmaz két különböző sorozatot: $(1, 1, \dots, 1, 2, n)$ és $(1, 1, \dots, 1, 2, 2, k + 1)$. ☐

A fentiek következménye, hogy

12. tétel: *Ha* $a(n) = 1$ *és* $n \geq 5$*, akkor* $6|n$. ☐

13. tétel: *Ha* $a(n) = 1$ *és* $n > 100$*, akkor* n $7k$, $7k + 2$, $7k + 3$ *vagy* $7k + 6$ *alakú* ($k \geq 14$).

Bizonyítás: $A(n)$ halmaz tartalmazza az $(1, 1, \dots, 1, 2, n)$ halmazt. Ha $n = 7k + 1$, $7k + 4$ vagy $7k + 5$, akkor $A(n)$ elemei még rendre

$$(1, 1, \dots, 1, 8, k + 1), \quad (1, 1, \dots, 1, 2, 4, k + 1), \quad (1, 1, \dots, 1, 2, 2, 2, k + 1). \square$$

14. tétel: *Ha* $a(n) = 1$ *és* $n > 100$*, akkor* n $30k$ *vagy* $30k + 24$ *alakú* ($k \geq 3$).

Bizonyítás: Mivel $6|n$ (12. tétel), ezért n $30k$, $30k + 6$, $30k + 12$, $30k + 18$ vagy $30k + 24$ alakú. Ha $n = 30k + 6$, akkor $n - 1$ nem prím, ami ellentmond a 9. tételnek. Tudjuk, hogy $A(n)$ mindig tartalmazza az $(1, 1, \dots, 1, 2, n)$ halmazt. Ha $n = 30k + 12$ vagy $n = 30k + 18$, akkor $A(n)$ elemei még rendre

$$(1, 1, \dots, 1, 2, 2, 2, 2, 2k + 1), \quad (1, 1, \dots, 1, 2, 3, 6k + 4). \square$$

A fentiekből következik, hogy ha $n > 100$ és $a(n) = 1$, akkor n csak $210k$, $210k + 24$, $210k + 30$, $210k + 84$, $210k + 90$, $210k + 114$, $210k + 150$ vagy $210k + 174$ alakú lehet.

Beláttuk (14. tétel), hogy ha $a(n) = 1$ és $n \geq 5$, akkor n $30k$ vagy $30k + 24$ alakú ($k \geq 0$), azonban úgy gondoljuk, hogy az $n = 30k$ eset nem működik.

1. sejtés: *Ha* $n \geq 5$ *és* $a(n) = 1$*, akkor* n $30k + 24$ *alakú.*

2. sejtés: *Ha* $n > 100$ *és* $a(n) = 1$*, akkor* $n = 114$, $n = 174$ vagy $n = 444$.