Pósa Lajos

SOROZATOK

Műszaki Könyvkiadó, Budapest

E tankönyv használatát a Művelődési és Közoktatási Minisztérium
a 42.216/25/93. VIII. számon engedélyezte.

A könyv a Soros Alapítvány támogatásában részesülő
Matematika-módszertani Kutatócsoport közreműködésével,
az először 1983-ban megjelent jegyzet alapján készült.

A rajzokat készítette: Halmos Mária

© Pósa Lajos, 1983, 1998
© Hungarian edition Műszaki Könyvkiadó

ISBN 963 16 2230 4

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó
Felelős kiadó: Bérczi Sándor ügyvezető igazgató
Felelős szerkesztő: Halmos Mária
Műszaki vezető: Abonyi Ferenc
Borítóterv: Biró Mária
Műszaki szerkesztő: Ihász Viktória
A könyv terjedelme: 2,86 (A/5) ív
Azonossági szám: MK 1101107

Néhány szó a könyvsorozatról

A Matematika-módszertani Kutatócsoport középiskolai matematikatankönyv-sorozata, melynek ez a könyv is része, egy 1973-tól mintegy másfél évtizeden keresztül folyt tanítási kísérlet eredménye.

Ezúton mondunk köszönetet azoknak a tanároknak, akik részt vettek a kísérletben és minden munkatársunknak, akik értékes tapasztalataikkal, beszámolóikkal, megjegyzéseikkel nagyon sokat csiszoltak, javítottak az anyagokon.

Köszönetet mondunk Surányi Jánosnak, aki két évtizedig vezette a kutatócsoport sok nehézséggel terhes munkáját, figyelemmel kísérte, összefogta és kézben tartotta a tanítási kísérletet, nagy szakmai tudásával és emberségével segítette az iskolákban folyó munkát, a tanárok számára komoly támaszt jelentve; vállalta a kísérleti anyagok elkészítésének folyamatos szakmai irányítását, beleértve az anyagokhoz készített részletes bírálatait, amelyek alapján az évek folyamán sok jelentős javításra került sor.

Köszönettel tartozunk Gádor Endrénének, aki a kísérletező tanárok munkáját segítette, és akinek a kísérleti anyagok javításában is sok része volt, és Genzwein Ferencnek, aki a 80-as években nagy segítséget nyújtott ahhoz, hogy a kísérleti munkákat folytathassa a kutatócsoport.

Nagy szeretettel gondolunk Gábos Ildikóra, aki már sajnos nincs közöttünk, és aki nagy tanári tapasztalatával, a kísérletben való lelkes és áldozatkész részvételével, tanári útmutatók készítésével nagyon jelentős részt vállalt könyvsorozatunk kialakításában.

Hálával tartozunk Péter Rózsának, aki élete utolsó éveiben – már nagyon betegen is – igen sokat segített a könyvek elkészítésében; Rényi Alfrédnak, aki annak idején a Matematika-módszertani Kutatócsoportot a Matematikai Kutató Intézetben létrehozta, és aki nagyon hatékonyan támogatta a tanulók önállóságára, kezdeményezéseire, tapasztalataira, felfedezéseire építő matematikatanítást.

Köszönettel tartozunk Kékes Máriának, aki a Műszaki Kiadó részéről sokat tett azért, hogy ez a könyvsorozat minél tökéletesebben juthasson el az iskolákba.

Könyveink szedését D. E. Knuth amerikai matematikus TEX matematikai kiadványszerkesztő programjával készítjük. Bori Tamásnak, Fried Katalinnak és Juhász Lehelnek köszönjük, hogy ennek a lenyűgözően matematikuslelkületű programnak különböző fortélyait megismertették velünk.

Halmos Mária
a könyvsorozat alkotó szerkesztője

I. Bevezető feladatok

1. Van 9, szemre egyforma súlyunk és egy kétkarú mérlegünk. A súlyok közül az egyik hibás, a tömege 101 g, a többi jó, a tömegük 100 g.

Legkevesebb hány méréssel tudod szerencse nélkül kiválasztani a hibás súlyt?

2. (Folytatás)

A súlyok száma legyen most 9-nél több, a többi feltétel változatlan.

Legfeljebb hány súllyal tudod vállalni, hogy 3 méréssel, szerencse nélkül kiválasztod a hibás súlyt?

3. Kérdezz tovább!

4. Vegyünk kézbe egy papírlapot és hajtsuk ketté! Ezután újra kettéhajtjuk úgy, hogy kizárólag párhuzamos hajtásvonalak keletkezzenek. Hajtogassuk szét a papírlapot n darab félbehajtás után!

Hány hajtásvonal lesz rajta látható?

5. Megadok egy végtelen sorozatot:

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ldots$$

és néhány számot:

$$634 \qquad 1205 \qquad 576 \qquad 309 \qquad 46\,028$$

Döntsd el, hogy ezek közül a számok közül melyik szerepel a sorozatban és melyik nem. Arra is kíváncsiak vagyunk, hogy amelyik szám előfordul a sorozatban, az hanyadik tagként szerepel benne.

6. Melyik az ezredik páratlan szám?

7. Az 5, 9, 13, 17,... számtani sorozatnak mi a 6000-edik tagja?

8. Az 1, 2, 4, 8,... mértani sorozatnak mi a 20-adik tagja?

> Számtani egy sorozat, ha mindegyik tagja ugyanannyival nagyobb (vagy kisebb) a megelőzőnél.* Azt is megengedjük, hogy a tagok egyenlőek legyenek (tehát, hogy „0-val nőjön” a sorozat).

* Értelemszerűen: ezt csak a második tagtól kezdve kívánjuk meg.

Példák: 9, 12, 15, 18, . . .

7, 5, 3, 1, -1, -3, . . .

6, 6, 6, 6, 6, . . .

Mértani egy sorozat, ha mindegyik tagja ugyanannyiszorosa a megelőzőnek.*

Példák: 5, -10, 20, -40, 80, . . .

4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, . . .

3, 0, 0, 0, . . . (!)

7, 7, 7, 7, . . .

9. Melyik az n-edik páratlan szám?

10. Melyik a $(3n + 5)$-ödik páratlan szám?

11. Határozd meg az 1, 4, 7, 10, . . . számtani sorozatnak

a) az n-edik tagját,

b) a $2n$-edik tagját,

c) az n^2-edik tagját!

12. Határozd meg az alábbi számtani, illetve mértani sorozatok megadott sorszámú tagjait!

a) 11, 15, 19, 23, . . .

n-edik tag;

$(2n + 3)$-adik tag.

b) 6, 4, 2, 0, -2, . . .

n-edik tag;

$(n + 5)$-ödik tag.

c) 4, 12, 36, . . .

n-edik tag;

$(2n - 1)$-edik tag.

* Ezt is csak a második tagtól kezdve kívánjuk meg.

13. Az 1, 3, 5, 7, 9, 10, 12, ... sorozat azokat a pozitív egészeket tartalmazza (növekvő sorrendben), amelyek számjegyeinek összege páratlan számot ad.

a) Ez a sorozat számtani vagy mértani sorozat?

b) Mi a sorozat 2000-edik tagja?

★**c)** Mi az n-edik tag? (Nem képletet kell adni, hanem egy gyors módszert a meghatározására!)

14. Egy amerikai gyár főmérnöki állására pályázatot írtak ki. A tesztek kiértékelése után már csak két fiatal mérnök maradt versenyben.

A két pályázót tájékoztatták arról, hogy – felvétel esetén – a kezdő fizetésük havi 2000 dollár lesz, ez azonban gyorsan fog emelkedni: havonta 150 vagy félhavonta 50 dollárral – szabadon lehet választani a két lehetőség között.

Az egyik pályázó a havi 150 dolláros emelést választotta, a másik a félhavi 50 dollárosat. Az utóbbit vették fel.

Miért?

15. (Folytatás)

Az n-edik hónapban mi lenne a főmérnök fizetése az első, illetve a második változat szerint?

16. Egy öttagú számtani sorozat tagjainak összege 180, a negyedik és ötödik tag összege 81. Határozd meg a sorozat tagjait!

II. Számtani sorozatok n-edik tagja. Az n-edik tag jelölése. Rekurzívan megadott sorozatok

17. Sokszor határoztuk meg már egy-egy konkrét számtani sorozatnak az n-edik tagját. Végezzük el most ezt általánosan!

Milyen adatokat érdemes paraméterrel jelölni?

Megoldás:

Jelöljük a-val a sorozat első tagját és d-vel a „különbségét” (tehát azt a számot, amit hozzá kell adni egy tagjához, ha meg akarom kapni a következő tagot).

Ekkor a második tag: $a + d$.

a harmadik tag: $a + 2d, \ldots,$ és minden lépésnél d-vel nőnek a tagok. Hány lépéssel jutok el az elsőtől az n-edik tagig? Nyílván $(n - 1)$ lépéssel (mert az első taghoz nem kell eljutni, csak az összes többihez).

a-tól indultunk, és $(n - 1)$-szer növeltünk d-vel, így az **n-edik tag**:

$$a + (n - 1)d$$

18. Kéne valami jelölést találni arra, hogy **egy sorozat n-edik tagja**. A jelölésnek tartalmaznia kell két lényeges információt: hogy **melyik** sorozatról, és annak **hanyadik** tagjáról van szó.

Általánosan elterjedt jelölések egy sorozat tagjaira:

$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots\ a_n,\ a_{n+1},\ \ldots$

$b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots$

$c_1,\ c_2,\ c_3, \ldots$

Gyakoroljuk ezt a jelölést néhány egyszerű példán:

a) $a_n = 3n + 4$

Írd fel a sorozat első 5 tagját!

b) $c_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Írd fel a sorozat első 5 tagját!

c) $b_n = \dfrac{n}{n+1}$

Mi ennek a sorozatnak a hetedik tagja?

d) $a_n = n^2 + 2n$

Szerepel-e ebben a sorozatban a 940?

19. Legyen $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ számtani sorozat.

$a_n = ?$

20. Az $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ sorozatról a következőket tudjuk:

$a_1 = 7$ és $a_{n+1} = a_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

Határozd meg a sorozat első néhány tagját!

Írd fel a_n-et közvetlenül n segítségével!

21. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 2a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

Első néhány tag?

$a_n = ?$

22. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = na_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

$a_5 = ?$

$a_n = ?$

23. $a_1 = 7,\ a_{n+1} = a_n + n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

$a_8 = ?$

24. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

$a_{100} = ?$

25. $a_1 = 9,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

$a_{333} = ?$

A **20–25.** feladatokban rekurzívan megadott sorozatokkal találkoztunk. Ez azt jelenti, hogy meg van adva, hogy a sorozat hogyan kezdődik, és egy képzési szabály, amivel a tagokat egymás után meg lehet határozni.

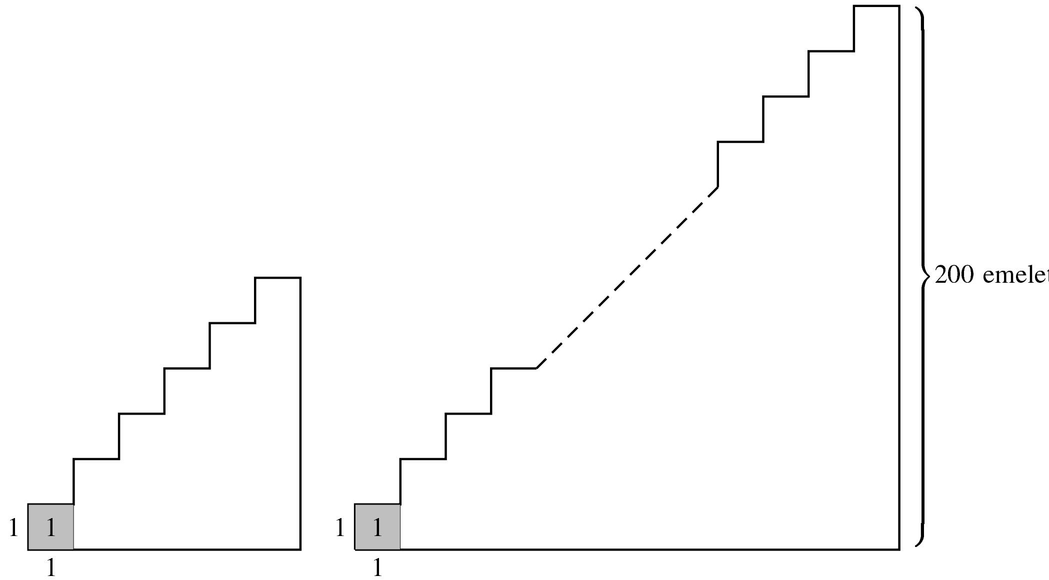
Kényelmesebb, ha a_n-re közvetlen képletet is ismerünk (amely az **előző tagok ismerete nélkül**, pusztán n segítségével fejezi ki a_n-et), ezért ha van rá mód, a rekurzívan megadott sorozat n-edik tagjára célszerű ilyen képletet is találni.

26. $a_n = 7n - 1$

Bizonyítsuk be, hogy $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ számtani sorozat!

Hogyan általánosítható a feladat?

27. Mekkora az ábrán látható lépcsők területe?



28. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = ?$

29. Mi az első $(n + 3)$ pozitív egész szám összege?

30. Mi az első $2n$ pozitív egész szám összege?

III. Egy kis százalékszámítás

31. Egy gyár évi termelése egy-egy év alatt 20%-kal csökken, 10%-kal nő, továbbá 30%-kal nő, de nem feltétlenül ebben a sorrendben.

Milyen sorrendben következzenek ezek be, hogy a negyedik évre a lehető legnagyobb termelés jöjjön ki?

Például ez az egyik lehetőség: 1. év: +30%, 2. év: +10%, 3. év: −20%.

32. Egy téglalap egyik oldalát 20%-kal csökkentjük.

Mennyivel növeljük meg a második oldalt, ha azt akarjuk, hogy a területe változatlan maradjon?

33. Egy gép árát először 70%-kal felemelték, majd a felemelt árat 40%-kal csökkentették.

Az így kapott ár hány százalékkal több az eredetinél?

34. Egy óra árát 20%-kal felemelték, majd a felemelt árat 20%-kal csökkentették.

Az így kapott ár hány százaléka az eredetinek?

35. Egy luxuscikk árát valahány százalékkal megemelték, majd miután így nem volt elég kelendő, a felemelt árat ugyanannyi százalékkal csökkentették. Így végül feleannyiba került, mint eredetileg.

Hány százalékos volt a két árváltozás?

36. Egy gyár évi termelése 1981-ről 1982-re kétszer annyi százalékkal nőtt, mint 1980-ról 1981-re. 1980-ban 480 tonnát, 1982-ben pedig 900 tonnát termeltek.

Hány százalékkal nőtt a termelés évről évre?

IV. Néhány sorozat n-edik tagjának, illetve az első n tag összegének meghatározása

37. Egy dúsgazdag fiatalember – kezében a 100 000 dolláros apai örökséggel – elment Monte-Carlóba szerencsét próbálni. Az első nap még csak 1 dollárt vesztett, de attól kezdve minden nap éppen 2 dollárral vesztett többet, mint az előző nap.

Mennyi idő alatt fogyott el a 100 000 dollár?

38. Határozd meg az első n páratlan természetes szám összegét!

39. Mi az első $(3n - 1)$ páratlan természetes szám összege?

40. 1 liter vízben feloldunk 10 g sót. Ezután a víz ötödét kiöntjük, és a helyére tiszta vizet töltünk, majd ezt a műveletet még további 49-szer (összesen tehát 50-szer) elvégezzük. Mennyi só marad meg a végére a 10 g-ból?

41. Két gyár évi termelése 1980-ban azonos volt: 100 tonna. Az egyik ettől kezdve évi 10%-kal, a másik pedig évi 100 tonnával növeli a termelését. Melyik termel többet hosszú távon?

Nézd meg az évi termelést például 30 év múlva! Változtass a számadatokon, és vizsgáld meg, hogy megváltozik-e a helyzet! (**Csak** az érdekel minket, hogy az – esetleg távoli – jövőben melyik gyár évi termelése lesz nagyobb.)

42. Határozd meg az első n darab 3-mal osztva 2 maradékot adó pozitív egész szám összegét!

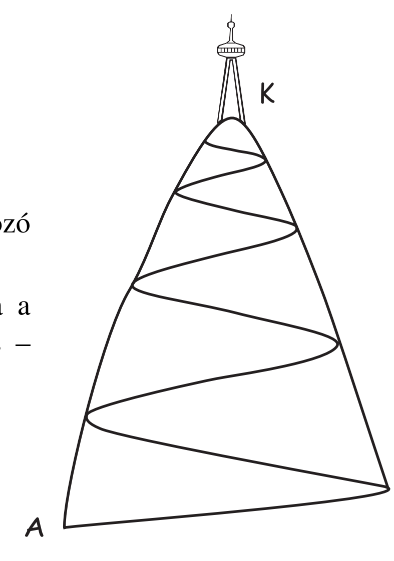
43. n egyenes legfeljebb hány részre vágja fel a síkot?

44. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 2n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

$a_n = ?$

45. Ábránkon két meredek út és egy azok között kígyózó szerpentin látható.

Hányféleképp lehet eljutni A-ból a Kilátóhoz (K), ha a meredek utakon és a szerpentinen – akár felváltva is – haladhatunk?



46. $a_1 = 3,\ a_2 = 4,\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

a) $a_{10} = ?$

★**b)** $a_{1000} = ?$

47. $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1}$

$a_{10} = ?$ (Elég műveleti jelekkel felírni.)

V. A sorozat fogalma

48. Van-e olyan sorozat, amelyben minden egész szám szerepel?

49. Hogyan definiálnád a sorozat fogalmát?

50. A sorozat **intuitív** fogalma:

Tetszőleges dolgok egymás után elhelyezve.

Véges sorozat:	Végtelen sorozat:
$(a_1, a_2, a_3, \ldots\ a_n)$	$(a_1, a_2, a_3, \ldots)$
Van egy első tag, aztán egy második tag, és így tovább az n-edik tagig.	Van egy első tag, aztán egy második tag, és minden n-re (n pozitív egész) van egy n-edik tag.
Több tag nincs.	
Például: (kedd, 5, 3, kedd)	Például: $(2, 1, 4, 1, 6, 1, 8, 1, \ldots)$

51. A sorozat **hivatalos** fogalma:

Definíció:

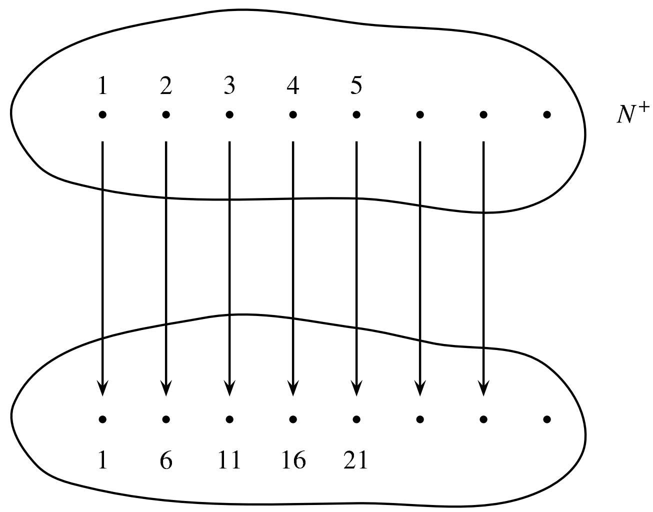
Sorozatnak nevezzük az olyan függvényt, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza. Az n számhoz hozzárendelt elemet a sorozat n-edik tagjának mondjuk.

(Ezek az elemek nemcsak számok, hanem bármiféle dolgok lehetnek, és a hozzárendelés módja is teljesen tetszőleges lehet.)

Megjegyzések:

(1) Az 1, 6, 11, 16, 21, 26, ... számtani sorozat idáig valami olyasfélét jelentett a számunkra, hogy az 1, a 6, a 11 stb. számokat elhelyeztük szépen egymás mellé egy végtelen hosszú, képzeletbeli vonal mentén. Pontosabban nem tudtuk volna elmagyarázni, hogy miről is van szó itt tulajdonképpen. A matematikában jó néhány fogalmat használunk, amelyet csak szemléltetni tudunk, de pontosan elmagyarázni – azaz egyszerűbb fogalmakra visszavezetni – nem. A matematikusok egy része arra törekszik, hogy az ilyen fogalmak számát legalább csökkentse, mégpedig úgy, hogy ezek egyikét-másikát – akár kissé mesterségesen, erőltetetten is – de visszavezesse a többi el nem magyarázott fogalomra.

Egy ilyen visszavezetéssel találkoztunk most. Eszerint a fent említett 1, 6, 11, 16, ... sorozatban ezentúl függvényt kellene látnunk, mégpedig azt a hozzárendelést, amely 1-hez 1-et, 2-höz 6-ot, 3-hoz 11-et stb. rendel:



Ez a függvény persze így is megadható:

$x \mapsto 5x - 4, \quad x \in N^+;$

vagy $f(x) = 5x - 4$ (x pozitív egész).

Ez a visszavezetés nem felel meg egészen az eredeti képünknek, hiszen a sorozatot nem hozzárendelésként képzeljük el, mégis látnunk kell, hogy **az új fogalom tökéletesen helyettesíti a régit**. Végül is mindegy, hogy azt mondjuk: „elemek egymás után, minden n-re van egy n-edik elem"; vagy azt, hogy egy hozzárendelésről van szó, amely minden n pozitív egészhez ad egy valamilyen n-hez hozzárendelt elemet.

(Persze az ilyen visszavezetés igen viszonylagos értékű, hiszen a **hozzárendelés** szó jelentését már nem magyaráztuk meg. Nem történne semmi tragédia, ha a sorozatot sem magyarázgatnánk, hanem használnánk a természetes elképzelésünket.)

(2) A megismert „hivatalos" definíció a végtelen sorozatra vonatkozik. **Sorozaton általában végtelen sorozatot értünk**. A véges sorozat fogalmára is adható hasonló jellegű definíció: a véges sorozat olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya az első valahány pozitív egész szám halmaza.

Megállapodás:

A továbbiakban – ha az ellenkezőjét nem mondjuk – sorozaton kizárólag (végtelen) **szám**sorozatot fogunk érteni.

52. a) Sorozat-e az $x \mapsto x^2$ $(x \geq 0)$ függvény?

b) Sorozat-e az $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ $\left(x \in N^+\right)$ függvény?

Ha igen, hogyan lehet más jelöléssel megadni?

c) A (0, 1, 0, 1, 0, 1, . . .) sorozat melyik függvényt jelenti? Mihez mit rendel hozzá ez a függvény?

Megjegyzés:

Szigorúan véve felsorolással nem lehetne sorozatot értelmezni, hiszen a megadott néhány tagot bárhogyan lehet folytatni. Mégis gyakran adunk meg sorozatot az első néhány tag felsorolásával – ilyenkor egy (pontosan soha meg nem fogalmazott) közmegegyezésre támaszkodunk.*

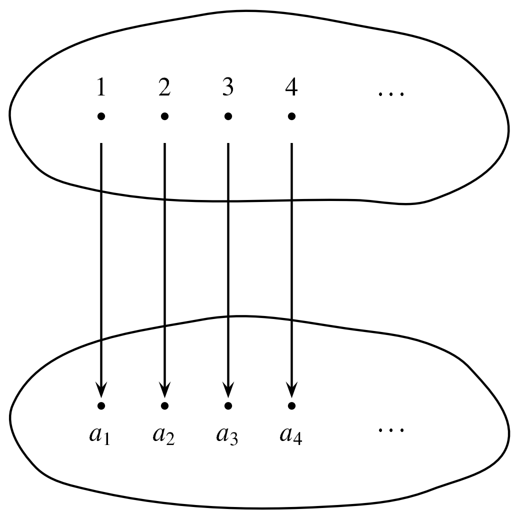
53. Különböző lehetséges jelölések ugyanarra a sorozatra:

a1) $(a_1, a_2, a_3, \dots)$

a2) $a_1, a_2, a_3, \dots$

b) $a, \quad a : N^+ \to R$ (Nem szokásos, bár teljesen logikus.)

c) $n \mapsto a_n \quad (n \in N^+)$



d1) $(a_n)_{n \in N^+}$

d2) (a_n)

d3) a_n (Pontatlan, mivel így jelöljük a sorozat n-edik tagját is.)

---

* Ezzel sokan nem értenek egyet!

Megjegyzések:

(1) Az a és az n betű helyett használhatunk más betűt is, tehát például (c_i), (d_k) szintén jelölhet sorozatot.

(2) A függvényeknél megszokott jelölések szerint az n-hez hozzárendelt elemet, vagyis a_n-et $a(n)$-nel kellene jelölnünk. Ez természetesen megengedett, de éppúgy nem szokásos, ahogy a **b)**-beli jelölés sem az.

Példák egyazon sorozat többféle lehetséges megadására:

a) $x \mapsto 3x + 2 \quad (x \in N^+)$

b) $(a_n), \quad a_n = 3n + 2,\ n \in N^+$

c) $a_n = 3n + 2$

d) $(3n + 2)_{n \in N^+}$

e) $(3n + 2)$

f) $(a_n) = (3n + 2)$

g) $(5, 8, 11, 14, \dots)$ (Lásd az **52.** pont megjegyzését.)

Sorozat megadásánál valamilyen módon tisztázni kell, hogy a sorozat n-edik tagját (n tetszőleges pozitív egész értékére) hogyan lehet meghatározni. Ennek módja bármilyen lehet. (Lásd például a **13.**, **22.**, **24.**, **45.**, **46.**, **48.** feladatokban, illetve a megoldásukban szereplő sorozatokat!)

54. Definíció:

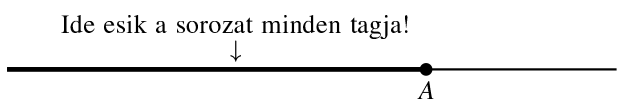
Az $(a_1, \ a_2, \ a_3, \dots)$ sorozat monoton növekedő, ha $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$

Szigorúan monoton növekedő, ha $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$

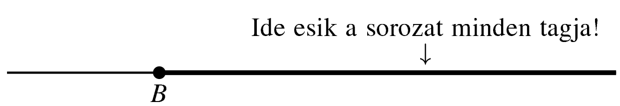
Hasonlóan értelmezhető az is, hogy egy sorozat (szigorúan) monoton fogy.

Definíció:

Egy sorozat felülről korlátos, ha létezik olyan A szám, amelynél a sorozat minden tagja kisebb vagy egyenlő.



A sorozat alulról korlátos, ha létezik olyan B szám, amelynél a sorozat minden tagja nagyobb vagy egyenlő.



Egy sorozat korlátos, ha alulról is, felülről is korlátos.

55. Tudsz-e mondani olyan szigorúan monoton növő sorozatot, amely korlátos?

56. Adj példát olyan korlátos sorozatra, amelyben sem legnagyobb, sem legkisebb elem nem található!

57. Konstruálj olyan sorozatot, amelyben minden pozitív egész szám végtelen sokszor szerepel!

58. A 3, 7, 10 számokból hány

a) 3

b) 5

c) 10

tagú sorozat készíthető? (Egy szám többször is felhasználható, és nem kötelező mindegyik számnak szerepelnie.)

59. Az 1, 5, 10, 17, 23 számokból hány húsztagú sorozat képezhető?

60. Konstruálj olyan pozitív egész számokból álló H halmazt, amelyre igaz, hogy **n akkor és csak akkor eleme H-nak, ha (n+3) nem eleme a halmaznak** (n pozitív egész szám). Hány ilyen halmaz van?

61. Módosítjuk az előző feladatot: Írjunk $(n + 3)$ helyébe $(2n)$-et!
A kérdés ugyanaz.

62. Bontsd fel a természetes számok halmazát

a) három végtelen halmazra,
b) négy végtelen halmazra,
c) tíz végtelen halmazra,
d) végtelen sok végtelen halmazra!

VI. Számtani sorozatok

63. Mi a feltétele annak, hogy az (a_n) sorozat számtani sorozat legyen?

64. Több alkalommal határoztuk meg már egy-egy megadott számtani sorozat első n tagjának összegét. Most elvégezzük ezt általánosan.

Legyen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ számtani sorozat, és jelöljük d-vel a szomszédos tagok különbségét (a számtani sorozat **differenciáját**).

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots$$

Határozzuk meg $(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$ értékét!

65. Most néhány villámkérdés következik. Fejben próbálkozz a megoldással, és csak a végeredményt írd le! (Ha nem megy fejben, akkor is törekedj a minél rövidebb megoldásra.)

a) Egy 20 tagú számtani sorozat első tagja 7, az utolsó tag 77. Mennyi a tagok összege?

b) Egy számtani sorozat 32. tagja 150; a 34. tagja pedig 156. Mennyi a 35. tag? Hanyadik tagként szerepel a 180?

c) Egy számtani sorozat első 5 tagjának összege 60. Mi a sorozat harmadik tagja?

d) Egy számtani sorozat első 11 tagjának összege 1. Megállapítható-e ebből a sorozat valamelyik tagjának az értéke?

e) Egy számtani sorozat harmadik tagja 4, századik tagja 6. Mi az ötödik tag?

f) Egy háromszög szögei számtani sorozatot alkotnak. Tudsz-e ebből következtetni a háromszög valamelyik szögének nagyságára?

g) Egy számtani sorozat hetedik és negyedik tagjának különbsége 15. Mi a 102-edik és a 97-edik tag különbsége?

66. Egy számtani sorozat ötödik és kilencedik tagjának összege 14, a harmadik és hatodik tag összege pedig 24. Melyik sorozatról van szó?

67. Egy számtani sorozat második és ötödik tagjának szorzata (-20). A harmadik és a hatodik tag összege 5. Mi a sorozat első tagja és a differenciája?

68. Egy számtani sorozat első 3 tagjának összege 15, szorzata (-120). Melyik sorozatról van szó?

69. Egy számtani sorozat első 5 tagjának összege 10, négyzetösszege 110. Határozd meg az első tagot és a differenciát!

70. Most egy körülbelül 4000 éves feladat következik az egyiptomi matematikából:

Osszunk szét öt ember között 100 cipót úgy, hogy a második ember ugyanannyival kapjon többet az elsőnél, mint a harmadik a másodiknál, a negyedik a harmadiknál és az ötödik a negyediknél. Még azt is megkívánjuk, hogy a három legnagyobb rész együttesen 7-szer annyit tegyen ki, mint a két legkisebb összege.

71. Mennyi a 100 és 200 közé eső 3 nevezőjű törtek összege?

72. Egy 6 tagú számtani sorozatban a tagok összege 90, és a legkisebb tagnak épp kétszerese a legnagyobb. Melyik számtani sorozatról van szó?

73. Egy sokszög szögei nagyság szerinti sorrendben:

$$120^\circ,\ 125^\circ,\ 130^\circ, \ldots$$

Hány oldala van a sokszögnek?

74. Egy számtani sorozat differenciája 3, az első elem n, az első n elem összege 235. Meghatározandó n értéke.

75. Egy számtani sorozat differenciája $\frac{1}{2}$. Az első n elem összege 81. Az első $(n + 4)$ elem összege 124. Mekkora az n értéke, és mi a sorozat első tagja?

76. Egy számtani sorozat első 5 tagjának összege 15, szorzata 210. Melyik ez a sorozat?

77. Egy számtani sorozat első 4 tagjának összege 4, szorzata 105. Melyik sorozatról van szó?

78. Add meg az összes olyan derékszögű háromszöget, amelynek az oldalai számtani sorozatot alkotnak!

Alkalmazásként oldd meg az *Összefoglaló feladatgyűjtemény* 3506., 3520. és 3540. példáját!

79. Egy háromszög oldalai számtani sorozatot alkotnak. A háromszögnek van 120°-os szöge. Határozzuk meg az oldalak arányát!

80. Egy számtani sorozat első 100 tagjának összege 100, a következő 100 tag összege 300. Mi a sorozat első tagja és differenciája?

81. Egy számtani sorozat első tagja 1, első n tagjának összege 400, a következő n tag összege 1200. Állapítsd meg n értékét és a sorozat differenciáját!

82. Bizonyítandó, hogy ha egy számtani sorozat első 9 elemének összege harmada a következő 9 elem összegének, akkor az első 99 elem összege is harmada a következő 99 elem összegének.

Hogyan lehetne ezt az állítást általánosítani?

83. Bizonyítandó, hogy 17 szomszédos szám összege osztható 17-tel! Igaz-e az állítás 17 helyett 16-ra?

84. Tudsz-e mondani három olyan számot, amelyek nem fordulhatnak elő ugyanabban a számtani sorozatban (vagyis nincs olyan számtani sorozat, amelyben mindhárom szerepel)?

85. Egy monoton növő (végtelen) számtani sorozatnak eleme a 3 és az 5. Döntsd el az alábbi számok mindegyikéről, hogy az A, B, C állítások közül melyik igaz rá!

A: Biztosan szerepel a sorozatban.

B: Biztos, hogy nem szerepel a sorozatban.

C: Sem A, sem B nem teljesül.

A számok: $111,\ 222,\ 9\frac{1}{9},\ 1001,\ \sqrt{250},\ -7,\ \sqrt{10}$.

86. Adj meg két szigorúan monoton növő (végtelen) számtani sorozatot úgy, hogy

a) ne legyen közös elemük,

b) csak egy közös elemük legyen!

VII. Mértani sorozatok

87. Mi a feltétele annak, hogy az (a_n) sorozat mértani sorozat legyen?

88. Bankba tettem a pénzemet. Évi 8 %-os kamat mellett hány év alatt nő a húszszorosára a betett összeg?

89. Egy gyár termelése minden évben ugyanannyi százalékkal emelkedett. 15 év leforgása alatt a termelés a nyolcszorosára nőtt.

Hány százalékos volt a növekedés évről évre?

90. Az A üzem évi termelése háromszorosa a B üzem évi termelésének. Az A üzemben évi 10 %-os, B-nél évi 15 %-os növekedést irányoztak elő. Ha minden a terv szerint halad, hány év múlva éri utol a B üzem évi termelése az A üzemét?

91. Legyen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mértani sorozat. Ez azt jelenti, hogy van egy q szám, melyre a sorozat tagjai így kaphatók meg egymásból:

$a_2 = a_1 q, \quad a_3 = a_2 q, \quad a_4 = a_3 q, \ldots$

q-t a mértani sorozat kvóciensének (hányadosának) nevezzük.*

Írjunk fel képletet a_n-re!

92. **a)** Mutassuk meg, hogy ha (a_n) számtani sorozat, akkor a_k számtani közepe a_{k-1}-nek és a_{k+1}-nek $(k \geq 2)$!
(Sőt: számtani közepe a_{k-p}-nek és a_{k+p}-nek is, ha $k > p$.)

b) Igaz-e, hogy ha (a_n) mértani sorozat, akkor a_k mértani közepe a_{k-1}-nek és a_{k+1}-nek $(k \geq 2)$?

93. Az $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots$ számokat nevezzük 2-hatványoknak. (Ez megállapodás kérdése, hiszen $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ stb. is tekinthető lenne 2-hatványnak.)

a) Sejtsd meg, hogy mi az első n 2-hatvány összege!

b) Határozd meg az első n 2-hatvány szorzatát!

---

* q értékét általában a sorozat meg is határozza.
Van azonban egy kivételes eset, a $(0, 0, 0, \ldots)$ sorozat. Itt q értéke bármi lehet.

94. Vezessük le általánosan a mértani sorozat összegképletét! Legyen $a_1, a_1q, a_1q^2, \ldots$ mértani sorozat, és mi képletet szeretnénk találni az első n tag összegére. Jelöljük x-szel a keresett, ismeretlen számot:

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} = x$$

Most jön a nagy ötlet: szorozzuk meg az egyenlőség mindkét oldalát q-val!

$$a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^n = xq$$

Próbáld meg innen önállóan befejezni a levezetést!

95. Határozd meg az első n 3-hatvány ($1, 3, 3^2, \ldots$) összegét és szorzatát!

96. Egy mértani sorozat első tagja 7, kvóciense 5.

a) Szerepel-e a sorozatban 10-nek valamilyen hatványa?

b) A sorozat hányadik tagja lesz harmincjegyű?

97. Egy 20 tagú mértani sorozat első tagja 3, utolsó tagja 4. Mi az ötödik tag? Mi a tagok összege? (Csak műveleti jelekkel kell felírni!)

98. Egy végtelen mértani sorozat minden negyedik tagját bekarikáztuk. Igaz-e, hogy a bekarikázott számok is mértani sorozatot alkotnak?

Mi a helyzet számtani sorozat esetén?

99. Villámkérdések következnek. Lehetőleg fejben oldd meg őket!

a) Egy mértani sorozat 79-edik tagja 150, a 80-adik tag 300. Mi a 82-edik tag?

b) Egy mértani sorozat 120-adik tagja 25, 122-edik tagja 100. Mi a 125-ödik tag?

c) Egy mértani sorozat 99-edik tagja (-20), 105-ödik tagja (-60). Mi a 111-edik tag?

d) Egy mértani sorozat 77-edik tagja 160, 80-adik tagja 40. Hányadik tagként szerepel a 2,5?

e) Egy mértani sorozat első három tagjának szorzata 64. Mi a második tag?

100. **a)** $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \ldots \pm 2^n = ?$

b) $1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \ldots + 3^{2n} = ?$

c) $8 + 4 + 2 + \ldots + \frac{1}{2^n} = ?$

101. Egy mértani sorozat első eleme 243, n-edik eleme (-32), az első n elem összege 133. Meghatározandó a sorozat második tagja.

102. Tíz éven át minden év elején betettem a bankba 6000 forintot. Mennyit ér a betétkönyv a tizedik év végén, ha a kamat 5 %?

103. 200 000 forintot kaptam kölcsön évi 7 %-os kamatra. 20 év alatt kell visszafizetnem évi egyenlő részletekben. Egy év elteltével fizetek először. Mekkora az évi törlesztés értéke?

104. 300 000 forintom van egy 5 %-os betétkönyvben. Minden év elején kiveszek 16 000 forintot. Hány év alatt fogy el a pénzem? (Az első 16 000 forintot akkor veszem ki, amikor a 300 000 forint már egy éve bent fekszik.)

105. Egy mértani sorozat első 3 tagjának összege 19, a harmadik tag 5-tel nagyobb az elsőnél. Melyik sorozatról van szó?

106. Egy 7 tagú mértani sorozat első 4 tagjának összege 15, az utolsó 4 tag összege pedig 120. Melyik ez a sorozat?

107. Egy 4 tagú mértani sorozat két szélső tagjának összege 26, a két középső összege (-6). Mi a sorozat első tagja és kvóciense?

108. Egy mértani sorozat első 4 tagjának összege 2, az első 8 tag összege 34. Mi a sorozat első tagja és hányadosa?

109. Három szám egyszerre alkot mértani és számtani sorozatot. Határozd meg az összes ilyen sorozatot!

110. Három szám számtani sorozatot alkot. Összegük 45. Ha az első számhoz 2-t, a másodikhoz 3-at, a harmadikhoz 7-et hozzáadunk, mértani sorozatot kapunk. Mi az eredeti három szám?

111. Három szám mértani sorozatot alkot. Összegük 37. Ha az első számhoz 5-öt, a másodikhoz 4-et, a harmadikhoz 2-t hozzáadunk, számtani sorozatot kapunk. Melyik három számból indultunk ki?

112. Három szám mértani sorozatot alkot. Ha a harmadik számot 3-mal csökkentjük, számtani sorozatot kapunk. Ha még az első számot is csökkentjük 1-gyel, ismét mértani sorozathoz jutunk. Mi volt az eredeti három szám?

113. Egy négytagú mértani sorozat elemeihez rendre 1-et, 6-ot, 2-t, illetve 16-ot adva számtani sorozatot kapunk. Melyek ezek a sorozatok?

114. Egy négytagú számtani sorozat elemeihez rendre 1-et, 2-t, 5-öt, illetve 11-et adva mértani sorozatot kapunk. Melyek ezek a sorozatok?

115. Abból, hogy $a_1,\ a_2,\ a_3,\dots$ számtani sorozat, következik-e, hogy

a) $a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\dots$ számtani sorozat?

b) $2^{a_1},\ 2^{a_2},\ 2^{a_3},\dots$ mértani sorozat?

116. Abból, hogy $a_1,\ a_2,\ a_3,\dots$ mértani sorozat, következik-e, hogy

a) $a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\dots$ mértani sorozat?

b) $a_2-a_1,\ a_3-a_2,\ a_4-a_3,\dots$ mértani sorozat?

117. Tegyük fel, hogy $a_1,\ a_2,\ a_3,\dots$ pozitív tagokból álló mértani sorozat. Biztosak lehetünk-e abban, hogy

a) $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ is mértani sorozat?

b) $(\lg a_n)$ számtani sorozat?

c) $(\sqrt{a_n})$ mértani sorozat?

118. Az előző három feladatból szedjük össze az igaznak bizonyult állításokat, és vizsgáljuk meg mindegyiknek a megfordítását! Melyik igaz, és melyik nem az?

119. $a,\ aq,\ aq^2,\dots$ mértani sorozat. Határozd meg

a) az első n tag négyzetösszegét;

b) az első n tag reciprokának összegét
(feltesszük, hogy nem szerepel a sorozatban a 0)!

120. Három szám számtani, a reciprokaik mértani sorozatot alkotnak. Adjuk meg az összes ilyen számhármast!

121. Három szám számtani, a négyzeteik mértani sorozatot alkotnak. Adjuk meg az összes ilyen számhármast!

122. Tudsz-e mondani három olyan számot, amelyek nem fordulhatnak elő ugyanabban a mértani sorozatban (vagyis nincs olyan mértani sorozat, amelyben mind a három szám szerepel)?

123. Bizonyítandó, hogy ha egy (végtelen) mértani sorozatban legalább két racionális szám szerepel, akkor a sorozatnak végtelen sok racionális tagja van. Mutassuk meg azt is, hogy a racionális tagok sorszámai számtani sorozatot alkotnak!

VIII. Teljes indukció

124. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots\ + n \cdot (n+1) = \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$

Szorgos Szilárd számológéppel kívánja ellenőrizni a fenti azonosság helyességét. $n = 1, 2, \ldots$ 1500-ra már meg is győződött az állítás igazságáról, ekkor azonban a gép váratlanul elromlott.

– Milyen kár! – kiáltott fel Szorgos Szilárd. – Hiszen engem leginkább az érdekelt volna, hogy az egyenlőség $n = 1501$-re igaz-e.

Meg tudnánk-e valahogy nyugtatni Szorgos Szilárdot?

125. Bizonyítandó, hogy

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots\ + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{4}$$

126. Bizonyítandó, hogy

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Megoldás:

(1) Az állítás igaz, ha $n = 1$. Ekkor $1^2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$.

(2) Mutassuk meg, hogy **ha az állítás igaz egy számra**, mondjuk k-ra; **akkor igaz a rákövetkező számra**, vagyis $(k+1)$-re **is**.

Bizonyítás: (A hiányzó részeket Neked kell pótolnod!)

Ezt tudjuk: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ + k^2 = \dfrac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6}$

Ezt szeretnénk ebből belátni: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ + k^2 + (k+1)^2 =$

A bal oldal ennyit nőtt:

A jobb oldal pedig ennyit:

(3) Az **(1)** pont szerint az állítás igaz, ha $n = 1$;
a **(2)** pont szerint ekkor igaz $n = 2$-re is,
$n = 3$-ra is,
$n = 4$-re is,
$n = 5$-re is,
$\vdots$

Az állítás tehát minden n-re igaz.

127. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots\ \frac{1}{n\cdot(n+1)}=$

128. $1^3+2^3+3^3+\ldots\ +n^3=$

129. Bizonyítandó:
$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots\ +n\cdot n!=(n+1)!-1$

130. Bizonyítsuk be, hogy
$(1+x)^n\geq 1+n\cdot x$, ha n pozitív egész és $x\geq -1$.

131. Bizonyítandó:
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ -\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots\ +\frac{1}{2n}$$

132. Igazoljuk, hogy
$2^n\geq n^2$, ha $n\geq 4$ és egész szám.

133. Jelöljük f_n-nel az n-edik Fibonacci-számot:
$f_1=1,\ f_2=1,\ f_3=2,\ f_4=3,\ f_5=5,\ldots\ f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$.

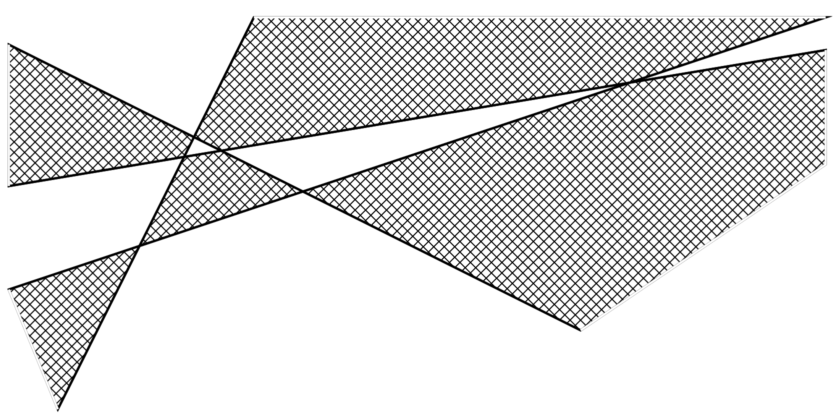
a) $f_1+f_2+\ldots\ +f_n=$

b) $f_1^2+f_2^2+\ldots\ +f_n^2=$

A jobb oldalon **nem csak *n* szerepelhet**, a sorozat tagjait is felhasználhatjuk (például f_n, f_{2n} stb.).

134. Mutassuk meg, hogy a szomszédos Fibonacci-számok mindig relatív prímek!

135. Rajzoljunk meg a síkon véges sok egyenest tetszőlegesen! Ezzel a síkot néhány részre felosztottuk. Bizonyítsuk be, hogy ezek a részek kiszínezhetők két színnel úgy, hogy közös **határvonallal** rendelkező részek színe mindig különböző legyen!



136. Tegyük fel, hogy $a+\frac{1}{a}$ egész. Bizonyítandó, hogy $a^n+\frac{1}{a^n}$ is egész (ha n egész szám).

137. $a_1 = 3 \qquad a_{n+1} = 2a_n - 1$

$a_n = ?$

138. $a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = 3a_n + 2$

$a_n = ?$

139. Bizonyítandó, hogy egy pingpong körmérkőzés résztvevőit (a verseny után) mindig sorba lehet állítani úgy, hogy mindenki mögött (az utolsót kivéve) olyasvalaki álljon, akit ő legyőzött.

140. Foglaljuk össze a teljes indukciós bizonyítás jellegzetes gondolatmenetét.

Adva van állításoknak egy végtelen sorozata: $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ldots$

Például $A_1 : \boxed{\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}}$

$A_2 : \boxed{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}}$

$A_3 : \boxed{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}}$

$A_4 : \boxed{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}}$

$\vdots$

általánosan: $A_n : \boxed{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}}$

Célunk annak belátása, hogy mindegyik állítás igaz.

A következőképpen bizonyítjuk ezt be.

(1) Először is megmutatjuk, hogy $\boxed{A_1 \text{ igaz}}$.

(2) Utána igazoljuk, hogy minden n-re: $\boxed{\text{ha } A_n \text{ igaz, akkor } A_{n+1} \text{ is igaz}}$.

Ezzel már készen is vagyunk! Miért?

Abból, hogy A_1 igaz, következik, hogy A_2 is igaz.

Abból, hogy A_2 igaz, következik, hogy A_3 is igaz.

Abból, hogy A_3 igaz, következik, hogy A_4 is igaz.

$\vdots$

Tehát $\boxed{A_n \text{ minden } n\text{-re igaz}}$.

Néha nem a fenti módon, hanem annak kisebb-nagyobb módosításával bizonyítunk. Például a **132.** feladatnál csak az A_4, A_5, $A_6 \ldots$ állítások igazságával foglalkoztunk. Az is előfordul, hogy nemcsak A_n-ről következtetünk A_{n+1}-re, hanem szükségünk van a megelőző állításokra is.

Erre egy példa:

Mutassuk meg, hogy $f_n < 1{,}7^n$ (f_n az n-edik Fibonacci-szám).

141. A_1, A_2, $A_3, \ldots$ állítások egy sorozata. Mondani fogok különféle feltevéseket az A_n állításokról, és Neked az a dolgod, hogy megállapítsd: **mire lehet következtetni a feltételekből** (vagyis mely állítások igazsága vagy hamissága vezethető le belőlük).

a) (1) A_{10} igaz.

(2) Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz.

Megjegyzés:

Az előző feltételnél nem tisztáztuk, hogy n miféle értékeket vehet fel. Ilyen esetben ezt mindig úgy kell érteni, hogy a feltétel n összes szóba jövő értékére (vagyis minden pozitív egész számra) teljesül.

(De vö. a **74–75.** feladattal. Ott a feladat szövegéből kiderül, hogy a feltétel **csak n egy meghatározott értékére teljesül**.)

b) (1) A_{1000} hamis.

(2) Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz.

c) (1) A_1 igaz.

(2) Ha A_n hamis, akkor A_{n-1} is hamis.

d) (1) A_1 igaz.

(2) Ha A_n igaz, akkor A_{n+2} is igaz.

e) (1) A_2 igaz.

(2) Ha A_n igaz, akkor A_{2n} is igaz.

f) (1) Ha A_n igaz, akkor A_{2n} hamis.

(2) Ha A_n hamis, akkor A_{n-1} is hamis.

g) (1) A_1 igaz.

(2) Ha A_1, $A_2, \ldots A_n$ mindegyike igaz, akkor A_{n+1} is igaz.

IX. Vegyes feladatok

142. Az A üzem termelése 2,488-szorosa volt a B üzem termelésének. B minden évben kétszer annyi százalékkal növelte termelését, mint A. (Mindkét üzem egyenletesen, azaz évi ugyanannyi százalékkal emelte a termelést.) Öt év után érte utol a B üzem termelése az A üzemét.

Melyik gyár évi hány százalékkal növelte a termelését?

143. Egy gyár évi termelése 1981-ről 1982-re 10%-kal többet nőtt, mint 1980-ról 1981-re. 1980-ban 100 tonnát, 1982-ben pedig 210 tonnát termeltek.

Hány százalékkal nőtt a termelés évről évre?

144. Egy hat tagú mértani sorozat első három elemének összege 9, a többiek összege pedig (-72).

Melyik ez a mértani sorozat?

145. Egy 200 tagú mértani sorozat elemeinek összege 3. Ebből a páros sorszámú tagok összege 2.

Mi a sorozat első tagja?

146. Egy 60 tagú számtani sorozat páros sorszámú tagjainak összege is, hárommal osztható sorszámú tagjainak összege is 60.

Határozd meg a sorozat első két tagját!

147. Egy számtani sorozat első n tagjának összege $3n^2 + 5n$.

Melyik ez a számtani sorozat?

(Lásd a **141.** feladathoz fűzött megjegyzést!)

148. Egy sorozat első n tagjának összege n^3.

- **a)** Mi a sorozat hetedik tagja?
- **b)** Számtani sorozatról van-e szó?

149. A 2, 3, 7, 14, 24,... sorozatot az jellemzi, hogy a szomszédos tagok különbsége: 1, 4, 7, 10,... mindig ugyanannyival nő.

Keress képletet a sorozat n-edik tagjára!

150. 0 1 4 9 16 25 36

1 3 5 7 9 11

A négyzetszámok sorozata alá odaírtuk a szomszédos tagok különbségét. Számtani sorozatot kaptunk.

Definíció:

Az a_1, a_2, $a_3, \ldots$ sorozatot **másodrendű számtani sorozatnak** mondjuk, ha a szomszédos tagok különbségei: $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3, \ldots$ számtani sorozatot alkotnak.

Mutasd meg, hogy az $a_n = 2n^2 + 3n + 1$ sorozat másodrendű számtani sorozat!

151. (folytatás)

Öt szám másodrendű számtani sorozatot alkot. Az első szám 3, az utolsó 27, a számok összege 65.

Melyek ezek a számok?

152. Rajzoljunk meg a síkon n kört tetszőlegesen.

a) Legfeljebb hány részre vágják fel a síkot?

b) Hány színnel lehet a részeket kiszínezni, ha közös határvonallal rendelkező tartományoknak különböző színűeknek kell lenniük?

⋆153. Bizonyítandó, hogy tg 1° irracionális!

154. Adjunk meg egy olyan sorozatot, amelyben végtelen sok páros szám van, végtelen sok hárommal osztható szám van, de nincs egyetlen 6-tal osztható szám sem!

Van-e ilyen számtani sorozat?

⋆155. Határozzuk meg mindazon számok összegét, amelyeknek prímtényezős alakjában csak a 2 és a 3 szerepelhet, ezekből viszont együttesen épp 20 darab van jelen (ilyen számok például: 2^{20}, $2^{13} \cdot 3^7$ stb.)!

⋆156. Határozzuk meg mindazon számok összegét, amelyeknek prímtényezős alakjában csak a 2 és a 3 fordulhat elő, és mindegyikből legfeljebb 100 szerepelhet!

⋆157. Van-e olyan sorozat, amelyre teljesül a következő állítás?

Ha a p, q számok ($p \neq q$) szerepelnek a sorozatban, akkor szerepel a sorozatban legalább egy p és q közötti érték is.

⋆158. Bontsd fel a természetes számok halmazát két részre úgy, hogy egyik rész se tartalmazzon végtelen számtani sorozatot!

★159. Bontsd fel a természetes számok halmazát két részre úgy, hogy egyik rész se tartalmazzon végtelen mértani sorozatot!

★160. Van-e olyan sorozat, amelyben minden 0 és 1 közötti racionális szám szerepel?

161. Van-e olyan mértani sorozat, amelyben az 1, 2, 3 számok mindegyike előfordul?

★162. Van-e olyan számtani sorozat, amelyben az 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ számok mindegyike előfordul?

163. Az (a_n) sorozat elemei eleget tesznek az $a_n + a_{n+1} = 6n$ összefüggésnek minden pozitív egész n-re.

a) Lehet-e (a_n) számtani sorozat?

b) Add meg az összes ilyen tulajdonságú sorozatot!

164. Egy végtelen számsorozatban bármely három szomszédos tag összege 0. A sorozat 10-edik tagja 2, 200-adik tagja 3. Mi a sorozat 3333-adik tagja?