

**Kamatos kamat I.**

Írta: dr. Majoros Mária

Időről időre felvetődik a kérdés, hogy olyan feladatokat mutassunk a gyerekeknek, amelyek lehetővé teszik, hogy az általános matematikai fogalmakat össze tudjuk kapcsolni olyan gyakorlati szituációkkal, ahol a fogalom ismeretének hasznosságát meg tudjuk mutatni.

A matematikatanítás minden szakembere egyetért abban, hogy a matematika tanításának két alapvető feladata van:

1. Az ismeretközlés
2. A műveltségi területhez kapcsolódó képességek fejlesztése beleértve a tanulás tanulásának képességét is

A matematika tanításában soha nem a tanított ismeretek okozták az alapvető és nagy vihart kiváltó vitákat, hanem a tudás átadásának mikéntje – amit nevezhetünk szakmódszertannak – és a választott módszer eredményessége. Tudjuk, hogy a pedagógia az a terület, ahol mindent és annak az ellenkezőjét is be lehet bizonyítani. Minden tanítási reformnak azonban volt egy invariáns eleme: a gyengén teljesítők aránya, ami évtizedek óta az adott reformtól függetlenül 30-40 % között van.

Úgy gondolom, az a tény, hogy a gyengén teljesítők aránya egyetlen reform ellenére sem tudott csökkenni, arra vezethető vissza, hogy csak szóban tudunk megfelelni a matematika tanítása során bizonyos az emberi ismeretszerzésre jellemző alapvető követelményeknek. Minden reform az ismeretátadás középpontjába a képességek fejlesztését állítja, a fogalmak és összefüggések kialakítását pedig tevékenységekhez köti.

Ez valóban megfelel annak a tudományos ténynek, hogy az emberi ismeretek kialakulásában három alapvető szintet különböztetünk meg (J. Piaget: Válogatott tanulmányok):

- a. Tevékenység, tapasztalat
- b. Képzet, rajz, vázlat
- c. Absztrakt fogalom

Ha ténylegesen ez történne az oktatási folyamatban, akkor megfelelénk annak az alapvető követelménynek is, hogy az absztrakciót, mint centrális matematikai képességet fejlesszük. (W. Dörfler: Az általánosítás mint centrális matematikai képesség)

Ebben a tanulmányban azt próbálom megmutatni, hogy egy olyan témakörnél, mint a mértani sorozat és a kamatos kamat számítása, hogyan lehet felépíteni a tanítás-tanulás folyamatát úgy, hogy a tapasztalathoz kiindulva általánosítsunk.

Úgy gondolom, hogy 6. osztályban a százalékszámítás tanítása kiváló alkalom, hogy elkezdjük ezt a témát. Amikor a gyerekek megtanulják a törteket utána ennek speciális - a helyi értékes jelölés lehetőségét megőrző - formájaként a tizedes törteket, akkor különböző számolási feladatokban megtaníthatjuk a műveletvégzés szabályait az adott alakban felírt számokkal.

A tört rész és ennek speciális eseteként a százalékszámítás lehetőséget ad arra, hogy gyakorlati számolási feladatokban alkalmazzák a megszerzett tudásukat. Itt nyílik lehetőség

először arra, hogy a kamatos kamathoz kapcsolódó számolási feladatot mutassunk a gyerekeknek.

Hatodik osztályban a következő módon tanítottam ezt a témát.

### 1. feladat:

100000 Ft-ot elhelyezünk el a bankban. A kamat évi 11%. A bank évente hozzáírja a kamatot a tőkéhez.

Megbeszéltük a kamatszámítás lényegét, és azt, hogyan kell elképzelni, ha a pénzt lekötjük, és több évig a bankban tartjuk. Ezután a gyerekeknek anélkül, hogy elkezdték volna a számolást meg kellett válaszolni a következő két kérdést:

Első kérdés: Évente ugyanakkora összeggel nő a pénzünk?

Természetesen többen gondolták azt, hogy ugyanakkora összeggel nő a pénz, és kevesebben adtak helyes választ.

Második kérdés: Próbáld megtippelni, mennyi pénzed lesz!

2 év múlva:

4 év múlva:

10 év múlva:

Azok a gyerekek, akik úgy gondolták, hogy évente változatlan összeggel nő a pénzük, hozzáadták a tőkéhez azt a kamatösszeget, amit az első évre kiszámoltak. A többiek csak tippeltek, nem volt felfedezhető koncepció a válaszaik mögött. Azt azonban érzékelték, hogy „sok pénzük lesz”.

Ezután elkezdtünk számolni. A százalékszámítás lehetőséget adott arra is, hogy műveleteket végezzünk tizedes törtekkel. Ebben a helyzetben a gyerekek nem érezték öncélúnak a számolást, mert kíváncsiak voltak a végeredményre. Azért választottam a 11%-os kamatot, mert a jelenlegi pénzügyi helyzetben reális kamat egy hosszú távú lekötésnél, másrészt könnyű számolni vele.

Ezután kitöltöttük a táblázatot.

	Év eleje	Hozzáadott kamat	Év vége
1. év	100000	11000	111000
2. év	111000	12210	123210
3. év	123210	13553	136763
4. év	136763	15043	151806
5. év	151806	16699	168505
6. év	168505	18535	187040
7. év	187040	20547	207614
8. év	207614	22837	230451
9. év	230451	25350	255800
10. év	255800	28138	283938

### Harmadik kérdés: Milyen szabályosságot veszel észre?

Itt az egyik kisfiú észrevette, hogy az év végi kamattal megnövelt összeget úgy lehet kiszámítani, hogy az év eleji nyitó összeget megszorozzuk 1,11 századdal.

A második észrevétel az volt, hogy azért nem lehet évente ugyanakkora a kamat összege, mert év elején egyre nagyobb összeggel rendelkezünk.

### Negyedik kérdés: Tudsz-e egy általános szabályt adni a pénz növekedésére?

Ezt a kérdést közösen beszéltük meg. Miután korábban megállapítottuk, hogy a kamat kiszámítása nélkül is meg lehet határozni, mennyi pénzünk van egy-egy év végén, ezért elkezdtek felírni az egyes év végi összegeket a művelet elvégzése nélkül.

1. év	1000000	$100000 \cdot 1,11$
2. év	$100000 \cdot 1,11$	$100000 \cdot 1,11 \cdot 1,11$
3. év	$100000 \cdot 1,11 \cdot 1,11$	$100000 \cdot 1,11 \cdot 1,11 \cdot 1,11$
...		
8. év		
...		
10. év		
...		
18. év		

Itt bevezettünk egy jelet azért, hogy ne kelljen a szorzótényezőket olyan sokszor leírni. Ez a jel a hatványalak volt.  $100000 \cdot 1,11^3$ . Arra a kérdésre, hogy találkoztak-e már hasonló matematikai jelöléssel, az egyik kisfiú azt válaszolta, hogy szerinte a szorzás ilyen volt. A hatványalakot egy jelnek tekintettük, amiben csak a kitevőt neveztük meg. Azt mondtuk, hogy „ez egy rövidítés, és az a jelentése, hogy a kitevő azt mutatja meg, hányszor szoroztuk össze önmagával az 1,11 századot”.

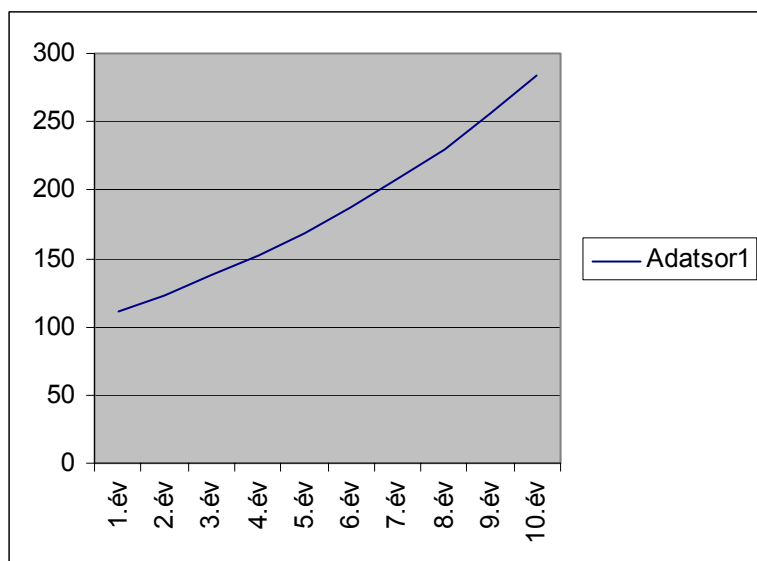
Ezután a gyerekek helyesen kitöltötték a táblázat hiányzó sorait.

Ötödik kérdés: Ha egy nagyapa az unokája születésekor betesz a bankba 100000 Ft-ot, amit a gyerek a 18. születésnapján vehet fel, és a kamat 11%, mennyi pénzt fog kapni a gyerek?

Miután a gyerekek kíváncsiak voltak az eredményre, ezért nem volt unalmas számukra, hogy elvégezzék az a 8 szorzást, ami a feladat befejezéséhez szükséges. Megállapítottuk, hogy az összeg körülbelül a 6,5-szeresére nő a 18. év végére.

Hatodik kérdés: Ábrázoljuk a pénz növekedését grafikonon a derékszögű koordinátarendszerben!

Mielőtt ezt a feladatot megoldottuk volna, a kamatot százásokra kerekítettük, a teljes összeget pedig ezresekre. Megbeszéltük, hogy a kerekítésnek ezzel a típusával is nagyon gyakran lehet találkozni, mert például a céges adóbevallásokon az APEH mindig ezresekre kerekített értékeket kér. Miután a feladatnak volt értelme, ezért a gyerekek nem találták unalmasnak és öncélúnak a kerekítést.



Itt egy excel által rajzolt grafikon látható. Az órán a gyerekek a derékszögű koordinátarendszerben ábrázolták a kapott értékeket. Az általuk készített ábrán sokkal jobban látszott a növekedés. Ugyanakkor az egyik kisfiú azt kérte, hogy olyan koordinátarendszerben ábrázolhassa a kapott értékeket, ahol a vízszintes tengelyen az egység az általunk választottunk a kétszerese. Ez lehetőséget adott arra, hogy megbeszéljük, milyen hatással van az egység megválasztása az ábra jellegére. Ezek után megbeszéltük a növekedési típust, és meg is neveztük. Nem definiáltuk pontosan, de a gyerekek is érzékelték a jellegét, ezért kimondtuk, hogy exponenciális a növekedés, és megbeszéltük, hogy nagyon sokszor fognak találkozni ezzel a növekedési típussal.

2. feladat:

Egy erdőben 10000 fa van. Minden évben két nagy vihar van, amikor sok fa elpusztul az erdőben. Minden vihar után az erdő faállományának két százalékát ki kell vágni.

Első kérdés: Tippeld meg, hogy hány fa lesz az erdőben?

1 év múlva:

2 év múlva:

5 év múlva:

	Év eleje	1. vihar után		2. vihar után	
1. év					
2. év					
3. év					
4. év					
5. év					
6. év					
7. év					
8. év					
9. év					
10. év					

Második kérdés: Ha évente csak egy vihar van, akkor hány év múlva lesz ugyanannyi fa az erdőben, mint a két vihar esetén?

Az előzőek után a gyerekek nem találták már nehéznek ezt a kérdést.

Harmadik kérdés: Milyen általános szabályt lehet észrevenni?

Először kiszámolták a két százalékot, és levonták az aktuális faállományból. Egy idő után itt is észrevették, hogy a 2 százalék levonása helyettesíthető azzal, hogy a megmaradt 98 %-ot számoljuk ki.

Negyedik kérdés? A szabály segítségével állapítsd meg, mennyi fa van az erdőben 10 év múlva.

Természetesen itt már egyszerűen adódott, hogy segít a hatványalak.

Itt is ábráztuk a kapott eredményt. Elemeztük a kapott grafikont, és megállapítottuk, hogy a kis mértékű csökkenés miatt kevésbé látszik az „exponenciális jelleg.

A korszerű oktatás egyik legfontosabb feladata az lenne, hogy megerősítse a helyes matematikai attitűdöt, mint alapvető viselkedésformát problémahelyzetben. Ez azt jelenti, hogy lehetőséget kell adni a gyerekeknek arra, hogy a fogalmakat a tapasztalatból kiindulva maguk alkossák meg. Ennek lépései a következők.

kísérletezés, próbálgatás  
megfigyelés  
összefüggések keresése  
általánosítás, törvényszerűségek megállapítása

A matematika tanulásánál ez együttes viselkedésforma, ami az eredményességet és a megértést jelentősen javítja. Pontosan ezért a fejlesztése kiemelt jelentőségű. Később ezt az attitűdöt nem kell továbbfejleszteni, mert körülbelül 14 éves korra az ismeretszerzést alapvetően meghatározó magatartássá válik.

Ma Magyarországon alapvetően nem tevékenységközpontú oktatás folyik. Azzal kezdtük, hogy a pedagógiában mindent és annak az ellenkezőjét is be lehet bizonyítani. Amikor mindezt leírom, szinte hallom az ellenérveket: Már hogyan folya tevékenységközpontú oktatás, hiszen a gyerekek megkapják a matematikai fogalmakat, és lehetőségük van arra, hogy megfigyeléseket végezzenek velük.

A legnagyobb baj itt a kész fogalommal van. A téma adja, hogy a hatványozás kapcsán fejtssem ki, mire gondolok. A gyerekek megtanulják a hatványalakat, majd elképesztően bonyolult műveleteket végeznek vele, és a tapasztalat, amit megszerezhetnek, hogy bonyolult algebrai jelek esetén, hogyan kell helyesen értelmezni a műveletek sorrendjét. Mindez megtörténik hetedik osztályban, majd nyolcadik osztályban még egyszer, mert a hatványozást kiterjesztjük negatív kitevőre, utána újra megcsináljuk mindezt a tört és valós kitevő esetén. A gyerekek 11. osztályban már ötödik éve tanulnak egy nagyon bonyolult algebrát gyakorlatilag anélkül, hogy egyetlen olyan feladattal találkoztak volna, ahol használni tudják ezt az apparátust.

Majd a 11. évfolyamom mutatunk néhány olyan problémahelyzetet szöveges feladat formájában, ahol alkalmazniuk kell az addig megszerzett tudás egy kis törtrészét, de erre az időre a gyerekek többsége teljesen közömbössé válik a matematika tanulását illetően.

Ha azt szeretnénk elérni, hogy fenntartsuk a gyerekek érdeklődését, szeretnénk megőrizni a nyitott gondolkodást, problémahelyzetekben a kutató, megfigyelő magatartást, akkor a

matematikát nem kezelhetjük zárt tudásként. Nem kell attól félni, hogy elvesz az a tudás, amit nem formalizálunk. Sok éves tapasztalatom, hogy sokkal jobban megmarad, és amikor eljön az ideje - mert tényleg szükség van rá - könnyen lefordítható az algebra nyelvére.

A tanulás iránti érdeklődés fenntartásának egyik fontos része a motiváció fenntartása. Az itt ismertetett feladatok megoldása, megbeszélése 5 órát vett igénybe. A gyerekek részben az iskolában dolgoztak a feladatokon, bizonyos számolásokat otthon végeztek el. A megmozgatott ismeretek mennyisége ugyanakkor sokkal több volt, mint amennyi hagyományos keretek között 5 órába belefér. Közben nagyon sok kérdést tettek föl a témával kapcsolatban. Őszintén remélem, hogy később, amikor újra visszatérünk a témára, bevezetjük a mértani sorozat fogalmát, és formalizáljuk az itt megfigyelt összefüggéseket, akkor sokkal jobb megértési szintet lehet majd elérni, mint a hagyományos keretek között.