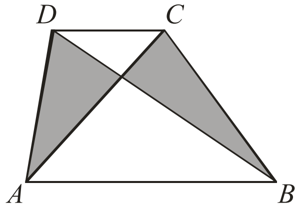
Miért nehéz?

A feladatok megoldásához szükséges gondolkodási műveletek

Írta: dr. Majoros Mária

Tanári munkánk során nagyon sokszor találkozunk olyan feladattal, amelynek a megoldása nagyon egyszerűnek tűnik, mert csak egyetlen matematikai lépésből áll, mégis a gyerekek nehezen jönnek rá a megoldásra.

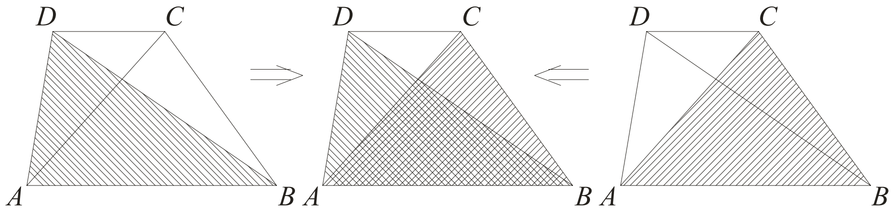
Ilyen például az a közismert geometria feladat, amikor azt kell bizonyítanunk, hogy a trapéz két átlója és a szárak által meghatározott háromszögek területe egyenlő.



1. ábra

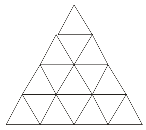
Ha a felhasznált matematikai ismeretek szempontjából nézzük a feladatot, akkor csak a háromszög területének kiszámítására vonatkozó összefüggést kell tudni. *ABC* és *ABD* háromszögek területe egyenlő, mert ugyanaz az alap egyenlő az *AB* szakasszal, a magasságuk pedig a trapéz két párhuzamos oldalának távolságával egyenlő, így ez is megegyezik. Ha *M*-mel jelöljük a trapéz két átlójának metszéspontját, akkor ezekből az egyenlő területekből ki kell vonnunk az *ABM* háromszögterületét, tehát a fennmaradó *BCM* illetve *DAM* háromszögek területe is egyenlő lesz.

Nézzük meg, a feladat megoldása során az érzékelés szempontjából milyen változásokon megy át az ábra, miközben végig ugyanaz a rajz van előttünk.



2. ábra

A matematikatanárok tudják, hogy ezt a fajta szemléletet fejleszteni kell. Nagyon sok feladat kapcsolódik ennek a differenciált érzékelési képességnek a kialakításához. Ilyen például az, amikor a gyerekeknek a következő ábrán össze kell számolni, hogy hány háromszöget látnak.



3. ábra

A fenti típusú tanulási jelenségek és megértésbeli nehézségek vezettek arra rá, hogy a matematikai gondolkodás leírásának jobb átláthatósága miatt új fogalmakat vezessek be.

1. A matematikai gondolkodás leírása történhet ***direkt*** illetve ***indirekt*** megközelítés alapján.
   Azt tekintem ***direkt*** leírásnak, amikor a gondolkodási mechanizmusokat helyes feladatmegoldások és helyes fogalomalkotások alapján elemezzük. ***Indirekt*** gondolkodás leírásról akkor fogunk beszélni, amikor a gondolkodási mechanizmusokat hibás feladatmegoldás, illetve téves fogalomalkotás esetén vizsgáljuk.
2. Meg fogjuk különböztetni a ***matematika szempontú*** és a ***gondolkodás-szempontú*** leírásokat.
   Matematika szempontúnak fogunk tekinteni egy elemzést akkor, ha a feladatmegoldások vagy a fogalomalkotások során megfigyelt lépéseket azonosítjuk azokkal a matematikai tételekkel, amelyeket felhasználunk. A feladatmegoldások során előfordulhat, hogy nem tudunk ilyen tételre hivatkozni, akkor a matematika-szempontúság azt jelenti, hogy az egyes lépéseket a matematikai tartalomban bekövetkezett változással azonosítjuk.
   Gondolkodás szempontúnak fogunk tekinteni egy elemzést akkor, ha megpróbál válaszolni a következő két kérdésre: ***hogyan lehet eljutni a megoldás felismeréséhez***, illetve ***milyen gondolkodási műveleteket alkalmazunk*** a feladat megoldása során.

A matematikai gondolkodási műveletek első rendszerezett leírása Pólya György nevéhez fűződik. Az ő érdeme, hogy a nagy matematikatörténeti felfedezések létrejöttének tanulmányozása, saját és mások probléma megoldási folyamatainak elemzése alapján megalkotta a matematikai gondolkodási műveletek rendszerét.

Pólya rendszerezésében a matematikai problémák megoldása során a következő gondolkodási eljárásokat alkalmazzuk:

1. *analógia keresése*
2. *általánosítás*
3. *specializálás*
4. *feladatok variálása*
5. *analízis-szintézis*
6. *heurisztikus okoskodás*
7. *indukció*
8. *ellenőrzés*
9. *definícióra történő visszavezetés*
10. *bizonyítás*
11. *rokon feladat keresése (analógia, általánosítás és specializálás alkalmazása)*
12. *ekvivalens megoldások keresése*
13. *szimbolikus gondolkodás*
14. *redukció ad abszurdum*
15. *indirekt bizonyítás*
16. *sejtés megfogalmazása*
17. *fordított irányú munka*
18. *kombinatorikus gondolkodásmód*

Pólya György eredménye, hogy feltárta a problémamegoldás fázisait:

1. *a feladat megértése*
2. *tervkészítés*
3. *tervünk végrehajtása*
4. *a megoldás vizsgálata*

Miért nehéz?

Képzeljünk el egy tanítási szituációt, amikor egy átlagos képességű gyerek nem tudja elkezdeni a fent ismertetett feladat megoldását. Ha a Pólya György által leírt gondolkodási műveletek alapján akarunk segíteni egy ilyen gyereknek, akkor a következő tanácsokat adhatjuk neki:

1. Értse meg a feladatot!
2. Gondoljon a trapéz definíciójára és a háromszögterületének kiszámítására! (definícióra történő visszavezetés)
3. Variálja a feladatot!
4. Próbáljon visszafele következtetni!

Ezektől a segítségektől általában nem lesz jobb a helyzet, mert ezek a tanácsok mind a matematikai tartalomra, és nem a szemléletre vonatkoznak. Pólya György ezt maga is nagyon jól tudta, hiszen a gondolkodás iskolájában leírja, hogy a matematikai ismeretek halott tudást jelentenek a megfelelő gondolkodási módszerek nélkül: *"...a diák végül is megtanulja, hogyan kell helyesen alkalmazni ezeket a kérdéseket és útmutatásokat, és ezzel valami olyasmit sajátít el, ami sokkal fontosabb bármilyen matematikai részletkérdés ismereténél."*
Arra azonban, hogyan is történik a tanulás, nem tudott igazán használható tanácsot adni *"A feladatmegoldás éppen olyan gyakorlati készség, mint mondjuk az úszás. Gyakorlati készségeket utánzással és gyakorlással sajátíthatunk el."*

Pólya után tehát nyitott kérdésnek tekinthetjük a következőket:

- Az általa ismertetett gondolkodási műveletek hogyan alakulnak ki.
- Van-e a sorrendnek szerepe, tehát van-e olyan művelet, amelyik a másik kialakulását szükségszerűen megelőzi?
- Az általa megjelölt gondolkodási műveletek általában az emberi gondolkodásra is jellemzők, vagy csak a matematikához kötődnek?

Azt hiszem, hogy a gondolkodás fejlesztése és felfedezése nem oldható meg a tanítási szituációkban, és nem lehet a tanár egyéni intuíciójának kérdése. Az értelmi fejlődés szakaszainak és jellegzetességeinek a megismerése meg kell, hogy előzze a tanítást. Természetesen nem oldható meg az értelmi fejlődés törvényszerűségeinek a matematikára történő alkalmazása sem egyénileg a tanár által. Tehát az eredményes tanításhoz szükség van a matematika tanulásának egy gondolkodás-szempontú elemzésére is.

A 20. század első felének nagy eredménye volt, hogy J. Piaget kidolgozta a megismerés és intelligencia születésének szintjeit:

1. Az érzékszervi-mozgásos szint. Ez a szakasz másfél-két éves korig tart. A gyerekek a cselekvéshez kötött tapasztalatok útján felfedezik azokat a lényeges invariáns tulajdonságokat, amelyek lehetővé teszik a tárgyak megnevezését és a beszéd kialakulását. Gondoljunk arra, hogy a gyerekek hosszú ideig a tárgyak tulajdonságának tartják például a tárgy helyét.
2. A művelet előtti gondolkodás első szintje. Ez a szakasz 5-6 éves korig tart. Ekkor történik meg a cselekvések összerendeződése.
3. A művelet előtti gondolkodás második szintje. A cselekvések összerendeződése képzetszinten is megtörténik. Erre vonatkozóan igen sok tapasztalatot szerezhetünk, ha kisiskolás gyerekek matematikai feladatmegoldását figyeljük meg. Hatéves kislánnyal matematikai játékot játszottam. Úgy kellett rendeznie a logikai készlet elemeit, hogy

bármely rákövetkező pontosan két tulajdonságban egyezzen meg a megelőzővel. A gyerek először úgy oldotta meg a feladatot, hogy találomra felvett egy elemet, összehasonlította a sorban utolsóval, majd eldöntötte, hogy jó-e. Az eljárást addig folytatta, amíg talált megfelelőt. Egy idő után már nem fogta meg fizikailag a kiválasztott elemet, hanem képzeletben hajtotta végre ezt a műveletet, és csak a jónak ítélt elemet helyezte át.

4. A konkrét műveletek első szintje. Ekkorra kialakul a gyerekek sorba rendező képessége, és egyszerű osztályozásokat is végre tudnak hajtani. Ezzel lehetővé válik a cselevések megfordíthatósága, így az első gondolati megfordítás, a visszafele következtetés kialakul. Ez a szint 6-9 éves korig tart.
5. A konkrét műveletek második szintje. A sorba rendezés és a megfordítás kialakulása az oksági összefüggés jelentős fejlődéséhez vezet. 12 éves korban zárul ez a szakasz.
6. A formális műveletek szintje. A gondolkodásban megjelenik az a képesség, hogy a tárgyakat helyettesítő fogalmakat és szimbólumokat ugyanolyan jól tudják a gyerekek kezelni. Nem véletlen, hogy például egyenleteket 12 éves korban kezdhetünk el tanítani.

Ha a tanulás pszichológiai hátterét elemezzük, akkor feltétlenül szót kell ejtenünk az ***asszimiláció-akkomodáció törvényéről***, amit szintén J. Piaget fedezett fel, és írt le. Ez a pszichikus fejlődésben megfigyelhető alapvető alkalmazkodási törvény**.** Minden újat a meglévő ismereteinkhez és tapasztalatainkhoz hasonítunk, tehát a rokon vonásokat keressük benne. Ez az asszimiláció. Miközben a meglévő tapasztalataink szerint működtetjük a dolgokat, felfedezzük eltérő voltukat, és ezáltal kialakul az új tárgyról való reális képzetünk. Ez az akkomodáció. Erre igazán nagyon sok példát lehet mondani: gondoljunk arra, hogy a kisgyerekek például mindent a szájukba vesznek, és ezáltal jönnek rá, hogy a dolgok egy része a látszat ellenére sem ehető. A matematika tanulásának bármely fázisában megfigyelhető, hogy bármely újban a gyerekek először a meglévő tapasztalatokkal rokon vonásokat keresik meg. A matematikusok ennek a jelenségnek a ***hamis analógia*** nevet adják. A ***matematikai tartalom megítélése szempontjából*** jogos ez az elnevezés. Az emberi ismeretszerzés törvényszerűsége alapján szerencsétlen, mert ha sikerült megértenünk az elmondottakat, akkor a hamis analógia a matematika tanulásának és általában minden tanulásnak szükségszerű első lépése, tehát nem hiba. Hibává akkor válik, ha a tanulás megreked ebben a fázisban. Az előző tanévben a februári tanulmányban részletesen elemeztem ezt a jelenséget.

J. Piaget nagy felfedezése az is, hogy alapvetően három gondolkodási műveletet különböztetett meg. Ezek közül mi kettőt használunk a matematikai ismeretek felépítésénél, illetve a problémák megoldásánál.

1. ***Visszafele következtetés*** (a matematikai fogalomalkotás szempontjából van kitüntetett szerepe)
2. ***Nézőpontváltás*** (= rugalmas gondolkodás, az összefüggések folytonos változtatása, e nélkül nincs eredményes problémamegoldás)

Az előző évben több tanulmányban is részletesen elemeztem, hogy a visszafele következtetésnek milyen szerepe van a matematikai fogalmak felépítésében. (Lásd az októberi, novemberi és decemberi tanulmányokat.)

Most azt fogjuk megnézni, hogyan járulnak hozzá ezek a gondolkodási műveletek a sikeres feladatmegoldáshoz mind a geometriában, mind az algebrában.

1. *Egy kártyajátékos elveszti pénzének felét, majd nyer 50 forintot. Azután elveszti meglévő pénzének az egy ötödét és nyer 40 forintot. Később elveszíti meglévő pénzének az egy hatodát és még 50 forintot, így 350 forintja marad. Mennyi pénzzel ült le játszani?*

Állapot	Gondolkodási művelet	Matematikai művelet	Eredmény
350	Visszafele következtetés	Összeadás	400
400	Nézőpontváltás $\frac{1}{6} \rightarrow \frac{5}{6}$	Törtrészből egész rész számítása	480
480	Visszafele következtetés	Kivonás	440
440	Nézőpontváltás $\frac{1}{5} \rightarrow \frac{4}{5}$	Törtrészből egész rész számítása	550
550	Visszafele következtetés	Kivonás	500
500	Nézőpontváltás	Szorzás	1000

2. *Szerkessz paralelogrammát, ha adott b, f és α! A b oldal 5 cm, az f átló hossza 8cm, és α, a paralelogramma f átlóval szemközti szöge 65^o.*

Állapot	Gondolkodási műveletek	Matematikai művelet	Eredmény
	-	A feladat megértése	Vázlat
A paralelogramma tulajdonságainak számbavétele	-	A kiterjesztett (tulajdonságokat is tartalmazó) fogalom megértése	Az adatok között kapcsolat keresése
A meglévő adatok alapján mi tudunk megszerkeszteni	Nézőpontváltás	Alapszerkesztések felidézése	Találtunk az adatokból szerkeszthető háromszöget
A feladat átfogalmazása: szerkesztendő egy háromszög, amelyben adott 2 oldal és a nagyobbikkal szemben fekvő szög	Nézőpontváltás	A szerkesztés végrehajtása	Az *ABC* háromszög megszerkesztése
Visszatérés a paralelogramma tulajdonságaihoz	Nézőpontváltás	Tükrözés az *f* átló felezőpontjára	A hiányzó *D* csúcs megtalálása

3. *Év elején egy iskola tanulóinak 40%-a fiú volt. Évközben a fiúk száma 10%-kal növekedett, a lányok száma viszont 5%-kal csökkent. Hány százalékkal változott az iskola tanulóinak összlétszáma?*

Állapot	Gondolkodási művelet	Matematikai művelet	Eredmény
Iskola		Törtrész számítása	$0{,}4 \cdot iskola$ $0{,}6 \cdot iskola$
	Nézőpontváltás = az alap megváltozott	Törtrész számítása	$0{,}4 \cdot iskola + 0{,}1 \cdot (0{,}4 \cdot iskola)$ $0{,}6 \cdot iskola - 0{,}05 \cdot (0{,}6 \cdot iskola)$
$0{,}44 \cdot iskola +$ $0{,}57 \cdot iskola =$ $1{,}01 \cdot iskola$	Nézőpontváltás = visszatérés az eredeti alaphoz	Egész részből törtrészre következtetés	$iskola + 0{,}01 \cdot iskola$

4. *Egy háromfordulós verseny első fordulójában a versenyzők 95%-a kiesett. A döntőben a második fordulóba jutottak 2%-a versenyzett. Hányan indultak az egyes fordulókban, ha a döntőben 23-an versenyeztek?*

Állapot	Gondolkodási művelet	Matematikai művelet	Eredmény
Indulók	Nézőpontváltás = a maradékra vonatkoztatunk	Törtrész számítása	$0{,}05 \cdot indulók$
$0{,}05 \cdot indulók$	Nézőpontváltás = a megváltoztatott alapra vonatkoztatunk	Törtrész számítása	$0{,}02 \cdot 0{,}05 \cdot indulók$
23	Visszafele következtetés	Törtrészből egész rész számítása	23000 gyerek

Érdemes visszalapozni az előző tanév áprilisban megjelent tanulmányához. Ott leírtam néhány feladatnak a mérésre és összehasonlításra, tehát a nézőpontváltás gondolkodási műveletére épülő megoldását.

5. *Hamupipőkének egy zsák lencsével összekevert babot kellett szétválasztania. A lencse és a bab tömegének az aránya 2:3 volt. Hamupipőke gonosz mostohájának úgy tűnt, hogy kevés a lencse, ezért még két kilogramm lencsét a zsákba szórt. Így a lencsének a babhoz való aránya annyi lett, mint amennyi előtte a bab aránya volt a lencséhez. Végül hány kilogramm lencsét és, hány kilogramm babot kellett Hamupipőkének szétválasztania?*

6. *Egy város 2 iskolájában 1240 gyerek tanul. Az egyik iskola tanulói számának négy ötöd része egyenlő a másik iskola tanulói számának három negyed részével. Hány gyerek jár az egyes iskolákba?*

Az eddig felhozott példák többnyire az általános iskolai tananyaghoz kapcsolódnak. Most néhány a középiskolában tanított egyenleten fogjuk megnézni. Az itt ismertetett feladatok mindegyikénél az egyes megoldási lépések között a nézőpontváltás gondolkodási művelete segítségével aktivizáljuk a megfelelő matematikai ismereteket.

Függvény definícióra vagy tulajdonságokra visszavezethető egyenletek	Azonosságok vagy a definíció alkalmazása után első vagy másodfokúra visszavezethető egyenletek	Az azonosságok segítségével lebontható egyenletek
1. feladat		
$\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(x-1)^2}=6$		
$\lvert x+3\rvert+\lvert x-1\rvert=6$		
	3 lineáris egyenletet kapunk	
		2. feladat
		$\left(\frac{2}{5}\right)^{\lg^2 x+1}=\left(\frac{25}{4}\right)^{2-\lg x^3}$
$\left(\frac{2}{5}\right)^{\lg^2 x+1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-2\left(2-\lg x^3\right)}$		
	$\lg^2 x+1=2\left(\lg x^3-2\right)$	
		3. feladat
		$9^{x+\sqrt{x^2+2}}-4\cdot 3^{x-1+\sqrt{x^2+2}}=69$
	$3^{x+\sqrt{x^2+2}}$-ben másodfokú	
$3^{x+\sqrt{x^2+2}}=9$ vagy $3^{x+\sqrt{x^2+2}}=-\frac{23}{3}$		
	$x+\sqrt{x^2+2}=2$	
4. feladat		
$\sin 3x+\cos 4x=2$		
sin 3x = 1 és cos 4x =1		

A tanulmány elején idéztem Pólya Györgyöt, aki azt írta, hogy a matematikai ismeretek halott tudást jelentenek a megfelelő gondolkodási módszerek nélkül. Ha meg akarjuk válaszolni a címben feltett kérdést, akkor azt kell mondanunk, hogy a gondolkodási módszerek nem verbális tudást jelentenek, hanem képességet. És ezért nehéz „tanítani" és „tanulni" őket. Hiába mondjuk el egy gyereknek, mit hogyan kell gondolnia, egészen addig nem fogja érteni, miről beszélünk, amíg feladatok megoldása során meg nem tapasztalja ezeket a gondolati eljárásokat. Utána hosszú út vezet el addig az állapotig, amíg a helyes ismeretek birtokában a gyerekek képessé válnak arra, hogy ösztönösen ráérezzenek a megfelelő összefüggésekre.

A gondolkodási műveletek helyes alkalmazása tehát egy képesség, ami sok-sok tapasztalat útján fokozatosan alakul ki. Nagyon fontos, hogy tanítás során pontosan tudjuk, hogy milyen határig van a tanult ismereteknek szerepe, és hol van szükség arra, hogy a megfelelő gondolkodási műveleteket aktivizáljuk. Ezt próbálják segíteni a táblázatok. Azt szoktam mondani a tanítványaimnak, hogy akkor beszélhetünk artikulált matematikai gondolkodásról, ha világosan szétválnak az ismeretek, és az ismeretek alkalmazásához szükséges gondolkodási műveletek.

Irodalomjegyzék

Mérei Ferenc: Gyermeklélektan és ismeretelmélet: Piaget életműve – Freud fényében és árnyékában, Interart Kiadó, Budapest, 1989.
Majoros Mária: Oktassunk vagy buktassunk? – Calibra Kiadó, Budapest, 1992.
Dr. Majoros Mária: A mérés III. http://matek.fazekas.hu/portal/tovabbkepzesek/oktvagybukt
Pólya György: A gondolkodás iskolája, Gondolat, Budapest, 1979.