A mérés I.

A megismerés szintjei

Írta: dr. Majoros Mária

1977-ben kezdtem el tanítani. Az első munkahelyem egy zenetagozatos zuglói általános iskola volt. Az első iskolai tanítványaim tehát többnyire jó családi háttérrel rendelkeztek, a szüleik odafigyeltek a gyerekek iskolai teljesítményére. Ennek ellenére a matematika tanítása során sokszor ütköztem megértési problémákba. Miután együttműködő, az órákon figyelő, a házi feladataikat elkészítő gyerekekről volt szó, így már rögtön a tanítás kezdetén felvetődött bennem a kérdés, a tanítás által követett felépítés, és a magyarázatok során alkalmazott modellek valószínűleg rosszul illeszkednek a gyerekek egy részének a gondolkodásához. Egy osztályon belül körülbelül a gyerekek 25%-a értette meg tökéletesen a tanított anyagot, 50%-nak voltak ködös, valamennyire jó elképzelései, és 25% tökéletesen hibásan használta a fogalmakat, jóllehet minden gyerek ugyanazt a magyarázatot hallgatta meg, és ugyanazokon a feladatokon próbálhatta ki a tudását, hiszen mindnyájan az én matematika óráimon ültek.

Miután borzasztóan zavart, hogy a gyerekek nem értik rendesen a fogalmakat, ezért egy idő után elkezdtem olyan – többnyire pszichológusok által írt – könyveket olvasni, amelyek az emberi ismeretszerzésről szóltak. Úgy gondoltam, hogy ennek jobb megértése, és a matematikára történő alkalmazása talán elvezethet ahhoz, hogy a tanári munkám során olyan magyarázatokat tudjak kialakítani, amelyek közelebb állnak a gyerekekhez, és ez által csökken azoknak az aránya, akik téves vagy homályos fogalmakat alakítanak ki.

Így jutottam el azokhoz az elméletekhez, amelyek a megismerésnek három szintjét különböztetik meg:

1. A világ érzékletes, cselekvés útján történő megismerését
2. A képzetszintű megismerést
3. A fogalmi szintű megismerést.

Ha az ember fejlődésére alkalmazzuk ezt a modellt, akkor a születés utáni időszakra a tapasztalás útján történő ismeretszerzés a jellemző. A kisgyerekek mindent megtapogatnak, megízlelnek, stb. Ilyen módon alakulnak ki az első elképzeléseik a világról.

A tapasztalatok fokozatosan képzetekbe mennek át, tehát az egyes tapasztalatokhoz vagy azok együtteséhez belső képek kapcsolódnak, amelyeket a gyerekek rajz útján meg tudnak jeleníteni. A rajzok és a képzetek már egyfajta sűrítést tartalmaznak, a dolgok lényeges tulajdonságait emelik ki. Nagyon fontos tudnunk, hogy a lényeges kétféle szempont szerint jön létre: egyrészt objektív szempontból lényeges elemeket, másrészt az egyén szempontjából fontos elemeket tartalmaz. A pszichológusok ezért tartják nagyon fontosnak a gyerekrajzok elemzését. A szubjektív torzítás a megismerés minden fázisában megjelenhet. (Itt emlékeztetnék arra, hogy korábban az azonosságok tanulása kapcsán már beszéltünk arról, hogy a nyelv tanulása során is megjelennek ilyen szubjektív elemek.)

A képzetszintű megismerést követi a fogalmi szintű gondolkodás, amely már semmilyen hasonlóságot nem mutat az ábrázolt valósággal. A jel elválaszthatatlan lényege, hogy önkényes, a matematikai jelek ugyanúgy, ahogyan a nyelvi jelek is.

Az absztrakt matematikai fogalmak kialakulása közben megfigyelhető szubjektív torzításokat én két jól elkülöníthető okra vélem visszavezetni. Mindkét torzítást a tanulás folyamatának elkerülhetetlen velejárójának tartom abban az értelemben, hogy ezek nélkül nem tud megbízható tudás létrejönni.

1. Az egyik torzítást a matematikusok nagyon régóta ismerik. Az első pontos leírását Beke Manó adta meg. A matematikadidaktikai szakirodalomban hamis analógia néven találjuk meg.

   Hamis analógiához vezet, ha a gyerekek nem a lényeges tulajdonságok alapján használnak egy fogalmat vagy jelet, hanem bizonyos felszínes hasonlóságok alapján.

   Nézzünk néhány példát a hamis analógiákra:

   a. Az előjeles számok tanításánál tömegesen előforduló hiba, hogy a gyerekek nem elemzik a számokból és műveleti jelekből vagy előjelekből álló jelsorozatot. Ilyenkor találkozhatunk például a következő hibával:

      -3 - 5 = (+8), mert „Mínusz, mínusz az plusz."

      Itt kétféle helyes értelmezést is adhatunk:

      0 – (+3) – (+5) =
      (-3) – (+5) =

   b. Vegyes számok szorzásánál figyelhető meg a következő hiba:

      $$3\frac{4}{5}\cdot 2\frac{3}{7}=6\frac{12}{35}$$

      A feladat helyes megoldása ismét a helyes értelmezésen múlik.

      $$\left(3+\frac{4}{5}\right)\cdot\left(2+\frac{3}{7}\right)=\frac{19}{5}\cdot\frac{17}{7}$$

   c. Az azonos átalakításoknál nagyon gyakran találkozunk azzal a hibával, hogy az átalakítások során egy idő után a gyerekek az egyenlőségjel miatt egyenletként értelmezik a kifejezést, ezért beszoroznak a nevezővel.

      $$\frac{3x+1}{x}+\frac{2x-3}{x+1}-\frac{5x-2}{x-1}=\frac{(3x+1)(x^2-1)+(2x-3)(x^2-x)-(5x-2)(x^2+x)}{x(x-1)(x+1)}$$
      $$(3x+1)(x^2-1)+(2x-3)(x^2-x)-(5x-2)(x^2+x)=0$$

d. Nagyon durva esetben figyelhetünk meg olyan hibákat, amikor a függvények megjelölésére használt betűket ismeretlenként kezelik a gyerekek:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 5$$

$$\frac{in}{co} = 5$$

Magántanárként találkoztam ehhez hasonló súlyos értelmezési hibával:

$tgx = \frac{5}{8}$ egyenlet esetében a gyerek az egyenlőség mindkét oldalából ki akart vonni tg-t. A téma alapján nem nehéz kikövetkeztetni, hogy érettségi előtt egy-két évvel történt mindez. A matematikai tanulmányoknak még ebben a nagyon előrehaladott állapotában is meg lehetett tanítani a helyes értelmezést.

Ezeknek a hibáknak a számát úgy tudjuk csökkenteni, ha minden esetben ragaszkodunk a feladatok értelmezéséhez. Például az „a” esetben arra kérjük a gyerekeket, hogy döntsék el, műveleti jeleket látnak-e vagy előjeleket. Ennek eldöntése többnyire nem könnyű feladat, mert először olyan válaszokat kapunk, hogy „mínuszt” lát. Itt ragaszkodnunk kell ahhoz, hogy olyan szóhasználatot alkalmazzanak, amellyel a műveletet és az előjeleket képesek határozottan megkülönböztetni. Miután tisztáztuk, hogy kivonást látunk vagy negatív számot, utána arra kérjük őket, hogy tegyék ki a hiányzó előjeleket. És ekkor újra értelmeztetjük a feladatot, majd visszakérdezünk arra, milyen hibát követtek el, amikor „mínusz, mínusz egyenlő plusz” választ adtak. Végül megkérjük a gyerekeket, hogy mondjanak példát arra, amikor helyes az általuk adott értelmezés.

Sokan úgy gondolhatják, hogy nem lehet egy ilyen apró hibára olyan sok időt elpazarolni. Valóban úgy tűnhet ilyenkor, hogy nagyon lassan haladunk. Nem szabad azonban szem előtt tévesztenünk, hogy ilyenkor nem ismeretet közlünk vagy tanítunk, hanem valami nagyon alapvető matematikai képességet fejlesztünk. Ha ezek a képességek létrejönnek, akkor később sokkal nagyobb sebességgel tudunk haladni, míg ellenkező esetben az alapvető értelmezésből fakadó hibák egyre jobban lassítják, esetleg a tanulmányok végéhez közeledve akár lehetetlenné is teszik az ismeretek átadását.

Az elején azt írtam, hogy a matematikadidaktika által hamis analógiaként megjelölt hibák a tanulás elkerülhetetlen velejárói.

A matematikai pszichológia H. Aebli munkássága óta szokás-cselekvésként azonosítja ezt a hibát. A szokás-cselekvések a feltételes reflexekhez hasonlóan működnek. Az emberi élet minden területére kiterjednek, nagyon sok esetben reflex-szerűen reagálunk dolgokra. Ezek e reakciók természetesen áttevődnek a matematikára is, a gyerekek ilyenkor a matematikai jelekre vagy jelsorozatokra, mint vizuális ingerre reagálnak. A helyes matematikai gondolkodás részben azáltal jön létre, hogy a gyerekek felismerik, miért nem alkalmazhatók a szokás cselekvések matematikai problémák megoldása során. Ezáltal tanulják meg, hogy minden matematikai kifejezés felépítését, a benne előforduló szimbólumokat elemezni kell. Ez adja meg azt a helyes értelmezést, ami alapján jó következtetéseket lehet levonni.

A szokás cselekvések gyakoriságát növeli, ha a gyerekek gondolkodása nem elég absztrakt, tehát minden olyan gyereknél megfigyelhető, akinek a matematikai képességei nem kiemelkedők. Megfelelő fejlesztés hatására elérhető, hogy az elemző gondolkodás fokozatosan felváltja a felszínes hasonlóságok alapján végzett következtetéseket.

Nagyon fontos kitérnünk arra is, hogy a szocio-kulturális környezet nagy befolyással van az értelmi fejlődés e területére. Azok a gyerekek, akik olyan családokból jönnek, ahol a döntések többsége úgynevezett presztizsorientált döntés abban az értelemben, hogy például a családfő ítéletei megkérdőjelezhetetlen igazságként hangzanak el, sokkal nehezebben tanulják meg a matematika által megkövetelt elemző gondolkodást. Az ilyen gyerekek akkor érzik magukat biztonságban, ha szabályokat mondanak nekik, amiket ők gondolkodás nélkül alkalmaznak.

2. A másik szubjektív torzítás az emberi ismeretek felépülésének törvényével hozható kapcsolatba. A matematikai fogalmak jelentése azonos azokkal a tapasztalatokkal és/vagy tevékenységekkel, amelyeket a gyerekek a fogalommal kapcsolatban szereztek vagy elvégeztek. Összegyűjtöttem néhány a gyerekektől származó értelmezést, ami plasztikusan mutatja, hogy ez tényleg így van.

   a. Ha megkérdezzük a gyerekektől, mi a függvény, akkor többnyire azt a választ kapjuk, hogy van grafikonja. Néhányan az értéktáblázatot említik. Attól, hogy elmondjuk a gyerekeknek, hogy a függvény definícióját, semmi nem fog történni, ha a definícióval kapcsolatban nincsenek olyan tevékenységekhez kötött tapasztalataik, amelyek elvezetnek az absztrakt fogalomhoz.

      Jelenleg a matematika oktatását alapvetően egy mennyiségi szempont határozza meg. Tehát egy-egy fogalom bevezetése után minél gyorsabban szeretnénk eljutni annak alkalmazásához, így a gyerekek a fogalmakat az alkalmazáshoz kötik.

   b. Az egyenlet fogalmával ugyanez a helyzet. Arra a kérdésre, hogy mi az egyenlet a gyerekek szinte kivétel nélkül azt válaszolják, hogy hozzáadunk, kivonunk egészen addig, amíg meg nem kapjuk az x-et.

      Ebben az esetben is a fogalom azzal a tapasztalattal lesz azonos, amit azzal kapcsolatban szereztek, és ez a gyök mérlegelv alapján történő megkeresése.

   c. A prímtényezős felbontást ugyanúgy azzal az eljárással fogják azonosítani, aminek segítségével a prímtényezőket megkeressük.

   d. A területet szintén a terület kiszámításának módjával azonosítják a tanítványaink. Ha megkérdezzük tőlük, mi a terület, akkor általában visszakérdeznek: attól függ, minek a területéről van szó, mert például a téglalap területe $t = a \cdot b$.

Ezeket a válaszok matematikai szempontból megítélve helytelenek, az emberi ismeretek felépülése szempontjából törvényszerűek. Tulajdonképpen minden ilyen a gyerekektől

származó értelmezés visszatükrözi azt, hogy mennyire volt statikus, kevés és nem a lényeghez kapcsolódó tapasztalathoz kötött egy-egy fogalom tanítása.
Felvetődik a kérdés, hogyan tudjuk a gyerekeket olyan tapasztalatokhoz juttatni, hogy a kialakuló matematikai fogalmak tartalmukat tekintve közelebb álljanak a tényleges definíció tartalmához.

Nagyon változatos tevékenységekhez kell kötni egy-egy fogalom kialakítását. Például a prímtényezős felbontás tanításánál sokkal kevésbé alakulnak ki a gyerekek gondolkodásában a fentiekhez hasonló statikus elképzelések olyan feladatok hatására, amilyenek az Apáczai Kiadó gondozásában megjelent 6. osztályos tankönyvben találhatók.

Érdemes Dienes Zoltánra hivatkoznunk, aki úgy gondolta, hogy nyitott fogalmakat kell tanítanunk. Ez alatt kétféle dolgot értett:

- A fogalmak folyamatosan bővülnek a decemberi cikkben bemutatott asszociációs hálóhoz történő kapcsolódással. Aki visszalapoz, ott talál erre példát.
- Másrészt a fogalmak tartalma újabb és újabb tapasztalatokkal jelentősen változik. Gondoljunk a függvény fogalmára, vagy az egyenlet fogalmára, amelyek az évek folyamán jelentős tapasztalatokkal bővülnek.

Levonhatjuk tehát a következtetést, hogy a szemléltetés és a tapasztalatszerzés alapvetően befolyásolják azokat az absztrakciókat, amelyek egy-egy fogalom alapját képezik. Pontosan ezért a szemléltetés elemzésével folytatjuk.

Irodalomjegyzék:

Beke Manó: Typikus hibák a matematika tanításban, Magyar pedagógia, 1900.
Majoros Mária: Oktassunk vagy Buktassunk? – Calibra Kiadó, Budapest, 1992.
H. Aebli: Lélektani didaktika – OPI kiadvány, Budapest, 1984.
R.Hess-V.C.Shipman: A kisgyerekkori tapasztalás és a kognitív eljárások szocializálódása – in: Az iskola szociológiai problémái, KJK, Budapest, 1974.
Dienes Zoltán: Építsük fel a matematikát!, Gondolat, Budapest, 1973.
Csahóczi E.-Csatár K.-Kovács Csongorné-Morvai É.-Széplaki Györgyné-Szeredi É.: Matematika 6. osztály – Apáczai Kiadó, Celldömölk, 2005.