Dr. Majoros Mária

Az azonosságok tanításáról I.

Aki megpróbált már idegen nyelvet tanulni, tapasztalhatta, hogy a nyelv ismeretének és helyes használatának – matematikai szakkifejezést használva – csak szükséges, de nem elégséges feltétele a szavak és a nyelvtani szabályok ismerete. Ha valaki megtanulja a szavakat és a nyelvtant, és mégis képtelen értelmesen kommunikálni az adott idegen nyelven, akkor erre a társadalmilag elfogadott kész válasz az, hogy az illetőnek nincs nyelvérzéke. Ezt a magyarázatot többnyire mindenki kritikátlanul elfogadja, pedig ennek az állításnak tökéletesen ellentmond az a tény, hogy az illető az anyanyelvét esetleg nagyon választékosan és tökéletesen beszéli. Mert logikus, ha valakinek nincs nyelvérzéke, az a saját anyanyelvét sem tudja rendesen megtanulni.

A nyelvészeket már nagyon régóta foglalkoztatja a nyelv, ezzel együtt a nyelvtanulás mibenléte. Hermann Paul (1846-1921), a német filológia professzora szerint a gyermek csak úgy juthat a nyelv birtokába, ha rekonstruálja azt önmagában. Ez a rekonstrukció Paul szerint azonban szükségképpen egyéni körülmények között megy végbe, és ezért az eredmény egyéni sajátosságokat tűntet fel. Amikor egy kisgyerek elkezd beszélni, akkor nagyon jól megfigyelhető, mennyire szubjektív a nyelvhasználata. A nyelvtanulás Paul szerint nem ér véget a nyelv eredeti elsajátításával, mert a másokkal folytatott kommunikáció hatására folyamatosan formálódik az egyén nyelve, hogy meg tudjon felelni annak a normának, ami az adott nyelvet használók közötti kommunikációt lehetővé teszi.

Miközben újraolvastam Hermann Paul írását folyamatosan azon gondolkoztam, mintha csak a matematika tanulásának folyamatáról írna. Szükségszerűen adódik a következtetés, ha a nyelv és a matematika tanulása ilyen szorosan összekapcsolható gondolkodási jelenség, akkor Paul nyilvánvalóan olyan a tanulás egészére vonatkozó törvényeket fedezett fel, amelyek az emberi gondolkodás és ismeretszerzés általános törvényei. Valóban néhány évtizeddel később J. Piaget genetikus ismeretelméletében már általánosan is megfogalmazta ezeket a tanulásra vonatkozó törvényszerűségeket.

Az „Oktassunk vagy Buktassunk?” című könyvben írtam le először, hogy a gyerekek a matematika tanulása során a már meglévő tudásukhoz próbálják meg hozzáilleszteni az új fogalmakat és ismereteket. Ennek a beillesztésnek a során téves értelmezések sokaságát figyelhetjük meg, ami természetes, mert a tanulás elkerülhetetlen fázisa. Amennyiben a tanítás nem redukálódik az ismeretközlésre, majd néhány példa után annak mérésére, hogy a gyerek mennyire képes a felszínen reprodukálni mindazt, amit megmutattunk neki, hanem az órákon valódi kommunikáció zajlik, akkor a téves értelmezésekkel nem minősítjük a gyerekeket, hanem a hibák segítenek bennünket, tanárokat abban, hogy megértsük az egyéni matematikai értelmezések lényegét. Amennyiben megértjük a gyerekek gondolkodását, hozzá tudjuk őket segíteni a helyes értelmezéshez és fogalomhasználathoz, ahhoz a bizonyos korábban említett normához, ami a matematikai kommunikációt lehetővé teszi.

Tapasztalatom szerint a matematika tanulása során az új fogalmaknak ez a beillesztése annál könnyebben történik meg, minél jobban kihasználjuk a már meglévő gondolkodási és fogalomalkotási sémákat. Ez konkrétan azt jelenti, hogy a felszínen megjelenő formai és tartalmi sokféleség mögött meg tudjuk mutatni azt a gondolati tartalmat, ami egységbe foglalja a látszólag nagyon különböző matematikai tartalmakat.

Az azonosságok tanításán szeretném megmutatni, hogy mi az a gondolati egység, ami lehetővé teszi, hogy a felszínen megjelenő sokféleséget a gyerekek könnyebben átlássák, és nagyobb biztonsággal tanulják meg.

Induljunk ki a matematika által elfogadott azonosságfogalomból: azonosságnak tekintünk egy egyenlőséget akkor, ha a betűk minden behelyettesíthető értéke esetén az egyenlőség mindkét oldalán ugyanazt a helyettesítési értéket kapjuk.

A gyerekek az iskolai tanulmányaik során időrendi sorrendben a következő azonosságokkal találkoznak:

1. a hatványozás azonosságai
2. nevezetes azonosságok
3. a négyzetgyökvonás azonosságai
4. az n-ik gyökre vonatkozó azonosságok
5. a tört kitevőre vonatkozó azonosságok
6. a logaritmus azonosságai

A matematika úgy alkotja meg a fogalmait, hogy egy olyan közös tulajdonságot keres, ami a formai megjelenéstől függetlenül állandó. A fenti 6 példában ez a betűkifejezéseknek az a tulajdonsága, hogy az értelmezési tartomány bármely elemének behelyettesítése esetén ugyanazt az értéket kapjuk az egyenlőség mindkét oldalán.

Miközben matematikailag egységesen azonosságként kezelhetjük a fenti 6 esetet, addig eredetüket és tartalmukat tekintve a 2. ponthoz tartozó nevezetes azonosságoknak semmi köze nincs a többi azonossághoz. A nevezetes azonosságok algebrai átalakításokról szólnak, míg a másik 5 pontban felírt azonosságok a szimbolikus számíráshoz kapcsolódnak. Egészen pontosan azt adják meg, hogy egy adott szimbólum használata esetén milyen számolási szabályokat lehet megalkotni az adott szimbólumra, mint jelölésre.

Ebben az értelmezésben nem a hatványozás azonosságai az első azonosságok, hanem a ***10-es számrendszerben felírt számokra vonatkozó számolási szabályok***. A helyi értékes számolási szabályokat azért nem érezzük azonosságnak, mert minden ember születése óta egy olyan világban nő fel, ahol minden mennyiséget ebben a jelölésrendszerben lát felírva. Természetesnek tekintjük, hogy a 4576 a $4 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 7 \cdot 1$ mennyiséget szimbolizálja. Szinte senki nem gondol arra, hogy a 4576 ugyanúgy szimbólum, mint a hatványalak vagy a gyökös alak, stb. Néha a matematika tanítása kísérletet tesz arra, hogy azokat a számolási szabályokat, amelyek a 10-es számrendszerben öntudatlanul is természetesek, tudatosítsuk. Ennek a tudatosításnak logikusan választható eszköze évek óta a mennyiségek megadása a 2-es vagy más alapú számrendszerben, és a műveletvégzés ezekben a számrendszerekben. Amikor ezt tanítottam, mindig az volt a tapasztalatom, hogy a gyerekek megtanulták használni a többi számrendszert, de szinte soha nem értem el a kívánt tanítási célt, a helyi értékes számolási szabályok tudatosítását. A gyerekek számára létezett a 10-es számrendszer a magától értetődő számolási szabályaival, és volt a többi számrendszer a megtanulandó számolási szabályokkal.

Annak idején sokat gondolkoztam azon, a gyerekek gondolkodásában miért vált ez ennyire ketté, jóllehet matematikai tartalmát tekintve ugyanarról volt szó. Ma már úgy gondolom, hogy ez törvényszerűen van így, mert mire egy gyerek 12-14 éves lesz, addigra a mennyiségérzékelését és a hétköznapi értelemben vett számolást öntudatlanul azonosítja a 10-es számrendszerrel. Azt is mondhatnánk, hogy a 10-es számrendszer úgy működik, mint a mennyiségek nagyságának „érzékszerve". Ahogyan a színek érzékelését sem azonosítjuk a látás bonyolult fiziológiai és pszichológiai folyamatával, úgy a 10-es számrendszer tulajdonságait is nagyon nehéz tudatosítani.

Hogy ez mennyire így van, akkor tapasztaljuk, amikor elkezdjük a törteket tanítani. Ekkor vezetünk be először egy olyan új mennyiségi jelölést, ami minden addig megszokott szabályt felborít, és a gyerekeknek újra kell értelmezni a számírást, újra kell fogalmazni a tört formában megadott mennyiségek összehasonlítását, és meg kell alkotniuk a törtre, mint új szimbólumra a számolási szabályokat. A tört az első olyan szimbólum, amit definiálnunk kell: egy vízszintes vonal elválaszt két számot. A vízszintes vonal alatti szám a nevező, ami definíció szerint megadja, hogy az egészet hány egyenlő részre bontjuk. A vízszintes vonal (törtvonal) fölötti szám megadja, hogy ezekből az egyenlő részekből hányat veszünk. Tehát ***a törtekre vonatkozó műveletvégzést tekinthetjük a második*** *– és ekkor már tudatosan kialakított számolási szabályokról van szó –* ***azonosságnak***, amivel a gyerekek a tanulmányaik során találkoznak:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad a,b,c,d\in N \text{ és } b,d\neq 0$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

Nagyon fontos, hogy a tanítás során két dolog világosan elkülönüljön:

1. az összeadás, szorzás, osztás mint művelet
2. hogyan adható meg ennek a műveletnek a végeredménye a műveletben részt vevő számok írásbeli alakjából kiindulva (ezek az azonosságok)

Az összeadás példáján mutatnám meg, hogy pontosan mire gondolok. A $\frac{3}{4}$ és a $\frac{2}{7}$ számokkal jelölt mennyiségeket bárki össze tudja adni: ezt a két mennyiséget egymás mellé tesszük, és ez lesz az összegük. Ez maga a művelet. Ugyanakkor szeretnénk a művelet végeredményét ugyanolyan formában, tehát tört formában megadni.

Ez a probléma egy nagyon gyakorlatias kérdést vet fel, hogyan tudom megmérni az összegként kapott mennyiséget. Jól látható, hogy erre nem alkalmas sem a negyed, sem a heted, mert nem tudjuk megmondani, hogy a $\frac{3}{4}$ hányszorosa a hetednek, és arra sincs pontos válasz, hogy a $\frac{2}{7}$ hányszorosa a negyednek. Ahhoz, hogy ezeket a méréseket pontosan el tudjuk végezni, olyan egységet kell választani, amivel mindkét mennyiséget össze tudjuk hasonlítani. Ez a huszonnyolcad lesz. Ennek a $\frac{3}{4}$ a 21-szerese, a $\frac{2}{7}$ pedig a 8-szorosa. Ezt a műveletet utána lefordíthatjuk a törtmennyiségek írásbeli szimbolikus megjelenésének formájára, és megfogalmazhatjuk a törtek írásbeli összeadására vonatkozó szabályt.

$$\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{7}=\frac{21}{28}$$
$$\frac{2}{7}=\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{4}=\frac{8}{28},$$
tehát
$$\frac{3}{4}+\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7}{28}+\frac{2\cdot 4}{28}=\frac{21+8}{28}.$$

Tehát a törtek összeadása, mint művelet a művelet elvégzésének írásbeli szabályaitól függetlenül létezik. Úgy gondolom, nagyon fontos, hogy a tanítás során ez a gondolat világosan megjelenjen.

A törteket ***a hatványozás azonosságai*** követik. A hatványalak egy újabb szimbólum, amivel a mennyiségeket írásban meg tudjuk jeleníteni. Ahogyan bármely szimbólum önkényes, így a hatványalak is, tehát definiálnunk kell a benne szereplő számok (alap, kitevő) jelentését és tartalmát. Az azonosság fogalma itt is azt jelenti, hogy megadjuk a hatványalakban felírt mennyiségekre vonatkozó számolási szabályokat. Ahogyan a törtek esetében, úgy itt is azonosság alatt azt fogjuk érteni, hogy hatványalakban megadott mennyiségekkel végzett műveletek eredménye hogyan adható meg hatványalakban. Itt is arra törekszünk, hogy a művelet végeredményét a műveletben részt vevő mennyiségek hatványalakjából vezessük le.

A „hatványozás azonosságai” fogalom alatt öt azonosságot szoktunk felsorolni:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$$
$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$$
$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$$
$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$$
$$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Az öt azonosság azonban csak a matematika fent megadott azonosság fogalma alapján kezelhető egységesen. Ez az öt azonosság tartalmát tekintve jól elkülöníthetően két csoportra bontható. Az első három azonosság arról szól, hogy hatványalakban megadott mennyiségek szorzata, hányadosa és hatványa hogyan adható meg szintén hatványalakban.

Az utolsó két azonosság a műveletvégzés sorrendjével kapcsolatos azonos átalakításokról szól, tehát gondolati tartalmát tekintve sokkal inkább a 2. pontban felsorolt nevezetes azonosságok körébe tartozik.

A hatványalak, mint jelölés bonyolult és szokatlan a gyerekek számára, ezért a hatványfogalom kialakításával érdemes nagyon tudatosan foglalkozni. Mindazok a készségek és képességek, amelyeket itt létrehozunk vagy megerősítünk, később nagyon hatékonyan fogják segíteni a gyök illetve a logaritmus fogalmának kialakítását.

A matematika és a pszichológia itt is különböző nézeteket vall a fogalom kialakításának mibenlétéről. A matematika a fogalom létrejöttét azonosítja a definícióval, és beszélünk a definíció közvetlen alkalmazásairól. A pszichológia ezt a két dolgot nem különbözteti meg: akkor tekinti ugyanis a fogalom kialakítását befejezettnek, ha azzal minden következtetést el tudunk végezni.

Nézzük meg, mit is jelent ez pontosan a hatványfogalom esetében!

$$2^{10} = 1024$$

$$2^{x} = 1024$$

$$x^{10} = 1024$$

Amikor a gyerekek könnyedén meg tudják válaszolni mindhárom kérdést, akkor tekinthetjük befejezettnek a fogalom és a fogalomhoz kapcsolódó szimbólum kialakítását.

A szeptemberi tanulmányban szó volt arról, hogy a tananyag meggondolatlan túlzsúfolása a gyerekek fejében káoszhoz vezet. A hatványfogalom bőven kínál ilyen lehetőségeket.

1. Az egyik tipikus hiba, amikor túlságosan hamar alkalmazzuk az új összefüggést negatív számokra, törtekre, stb.

   Bármilyen jól is értik a gyerekek a hatványozást, a fogalommal történő első találkozás idején (10-12 éves korban) többségük számára nehéznek tűnik például a következő feladat értelmezése és megoldása:

   $$\frac{(-3)^{-2}2^{5}(-3\cdot 5)^{2}}{3^{4}(2\cdot 5)^{6}}$$

2. A másik tipikus hiba, hogy a hatványozás gyakorlásába bevonunk olyan feladatokat, amelyek igazából más tudáshoz, készségekhez kapcsolódnak.

   A $2^{4^{3}}$ és a $(2^{4})^{3}$ kifejezések összehasonlítása esetében az első kifejezés csak annyiban kapcsolódik a hatványozáshoz, hogy van benne alap és kitevő. A feladat megértése és helyes értelmezése azonban attól függ, hogy felismerjük-e a műveletek sorrendjét.

   Miközben egy fogalmat építünk, közben az egyre bonyolultabb algebrai megjelenés szükségessé teszi a matematikai jelentés tudatos kialakítását. Minden algebrai kifejezés jelentése azon műveletek összessége, amelyek segítségével létrehoztuk azt.

   A $2^{4^{3}}$ kifejezést a következő műveletekkel hoztuk létre:

1. lépés: 4
2. lépés: 4 -et 3-ik hatványra emelem $\Rightarrow 4^3$
3. lépés: a 2-t emelem az előbb kapott kitevőre $\Rightarrow 2^{4^3}$

A $(2^4)^3$ kifejezés esetén ez a sorrend a következő:

1. lépés: 2
2. lépés: 2-t 4-ik hatványra emelem $\Rightarrow 2^4$
3. lépés: amit kaptam, tovább hatványozom $\Rightarrow (2^4)^3$

Mindnyájan érzékeljük, hogy ez az elemzés nagyon hasonlít arra, ahogyan a mondatokban az alá- és mellérendelő viszonyokat elemezzük. Nos a nyelvi hasonlatnál maradva, a fent leírt algebrai túlbonyolításokat a gyerekek úgy élik meg, mintha a nyelvtanulás kezdetekor azt várnánk tőlük, hogy nagyon bonyolult összetett mondatok – amelyekben a szavak jelentését is csak nehezen, szótár segítségével értik meg – elemzését könnyedén képesek legyenek elvégezni.

Novemberben a gyökvonás fogalmának bevezetésével kapcsolatos gondolataimat szeretném megírni. Decemberben a hatvány, a gyök és a logaritmus kapcsolatát szeretném elemezni.

Irodalomjegyzék:

Majoros Mária: Oktassunk vagy buktassunk? – Calibra Kiadó, Budapest, 1992.
Hermann Paul: A nyelvtörténet elvei (Részletek) – Szöveggyűjtemény az általános nyelvészet tanulmányozásához, szerkesztette: Dr. Telegdi Zsigmond, Tankönyvkiadó, Budapest, 1970. (A német nyelvű kiadás 1920-ban Hallében jelent meg Prinzipien der Sprachgeschichte címmel)
Mérei Ferenc: Gyermeklélektan és ismeretelmélet: Piaget életműve – Freud fényében és árnyékában, Interart Kiadó, Budapest, 1989.