Az azonosságok tanításáról III.

A logaritmus

Írta: dr. Majoros Mária

Októberben áttekintettük az azonosságok tanításának néhány általános összefüggését, novemberben azt elemeztük, hogyan vezethető be a gyökös szimbólum, illetve kitértünk arra, hogyan illeszthető ez az új jelölés a gyerekek már meglévő matematikai ismereteihez. Ebben a hónapban a logaritmussal szeretnék foglalkozni. Az azonosságok tanításának ez lesz az utolsó fejezete.

Felvetődhet a kérdés, nem tulajdonítok-e túlzott jelentőséget a matematikai szimbólumok bevezetésének és használatának. Úgy gondolom, hogy nem. Tapasztalatom szerint ugyanis a gyerekek igen nagy hányadánál a „matematikai megértést” döntően nem az értelmi képességek befolyásolják. Az esetek nagy részében a gyenge értelmezési képesség és megértés arra vezethető vissza, hogy a gyerekekben nem alakul ki az a szemlélet, ami a szimbólumok használatára egyáltalán képessé tenné őket.

Amikor a 80-as években hosszú időn keresztül olyan gyerekeket tanítottam, akik az iskolájukban nyújtott elégtelen teljesítmény miatt kerültek hozzám, akkor nagyon jól meg lehetett figyelni, hogy a gyenge matematikai teljesítmény mögött minden esetben felfedezhető volt az írásbeli kifejezés gyengesége. Erről részletesen írok az „Oktassunk vagy buktassunk?” című könyvem „Szubjektivizmus” és „Analfabétizmus” című fejezeteiben. Pontosan azért tehát – hogy ezek a tanulási zavarok ne állhassanak elő – tartom nagyon fontosnak a matematikai szimbólumok tanítását, amelyek közül a gyereke talán a logaritmust értik meg a legnehezebben.

A hatványalak lehetőséget ad arra, hogy a 10-es számrendszerről és a tört alakról áttérjünk egy újabb jelölésre. A pozitív egész kitevőjű hatványok azt adják meg, hogy valamit hányszor veszünk szorzótényezőül. A pozitív egész kitevőjű hatványok értelmezéséből természetes módon levezethető a 0 és negatív kitevőjű hatvány értelmezése:

$$1=\frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}=\frac{2^5}{2^5}=2^{5-5}=2^0$$

$$\frac{1}{3^4}=\frac{3\cdot3\cdot3}{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}=3^{3-7}=3^{-4}$$

A hatványalakot nem olyan igény hozta létre, hogy valamilyen létező mennyiséget nem tudtunk a korábban ismert jelöléseink segítségével leírni.

Az előző tanulmányban láttuk, hogy a hatványalakkal ellentétben a gyökös jelölés bevezetését az teszi szükségessé, hogy vannak olyan mennyiségek, amelyek más formában nem írhatók le. Tehát míg az ***egész kitevőjű hatványok nem vezetnek el a számfogalom kiterjesztéséhez, addig a gyök igen.***

Miután a hatványozás kiterjesztése megtörténik tört és irracionális kitevőre, és bevezetjük az exponenciális függvényt, létrehozunk egy új fogalmat, a logaritmus fogalmát. Nagyon fontos megkülönböztetés, hogy a logaritmust – mint a mennyiségek leírására alkalmas új jelet – alapesetben nem használjuk a számfogalom bővítésére. Pedig nagyon fontos lenne megmutatni például a $\log_{10}2$-t, amiről könnyen igazolható, hogy irracionális. Az irracionális szám fogalmát árnyaltabbá teszi, ha foglalkozunk azzal, hogy míg a $\sqrt{2}$-t a geometria hívta elő, addig a $\log_{10}2$-t az aritmetika. (Azok a gyerekek, akik emelt óraszámban tanulják a matematikát, ekkor találkozhatnak a valós szám fogalmának valódi tartalmi tisztázásával.) Azokban a gyerekekben, akik csak alapóraszámban tanulják a matematikát, joggal vetődik fel a kérdés, hogy miért van szükség a logaritmus bevezetésére?

Erre részben a logaritmus- (tágabban a tudomány) története adhat választ. Erről itt olvashatunk néhány gondolatot: link ⇒.

A hatványozás azonosságainál láttuk, hogy a kitevőben végzett műveletek esetén a szorzást/osztást összeadással/kivonással helyettesítjük, míg a hatványozást szorzással. Így aritmetikai szempontból a kitevőben végzett műveletek leegyszerűsítik a számolás folyamatát. Ma azok a gyerekek, akik a matematikát alapóraszámban tanulják, elsősorban a logaritmus ezen aspektusával találkoznak.

Ebben az értelemben a logaritmus gondolatilag a hatványozással és a hatványozásból levezetett normálalakkal mutat természetes kapcsolatot. A matematikai felépítés itt sem esik egybe a gondolkodás szempontjából természetesnek tekinthető építkezéssel.

A hatványozás azonosságai esetében az alapot írjuk, miközben a kitevőben végezzük a műveleteket. A normálalak esetében az alap csak 10 lehet. A logaritmus esetében ugyanazokat az azonosságokat használjuk – nem is használhatunk mást – hiszen a kitevőben végezzük a műveleteket itt is. Az egyetlen különbség, hogy a kitevő az alap és a hatványérték függvényeként jelenik meg. Erre egy új jelet kell bevezetni, de ettől még ugyanazok a számolási szabályok érvényesek rá.

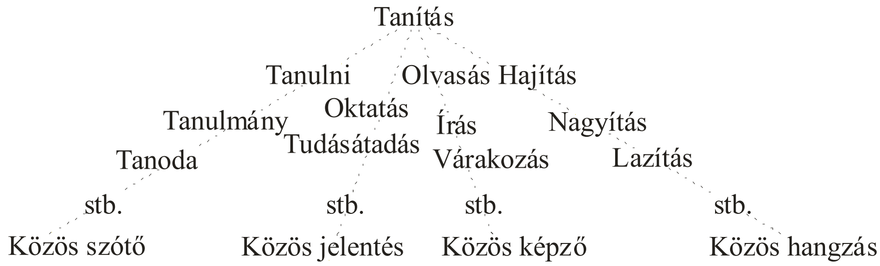
A tanítás folyamata ezt a természetes kapcsolatot megtöri. A gyerekek először a hatványozás azonosságaival találkoznak. Ezt azért kell megtanulniuk, hogy rögtön utána be lehessen vezetni a normálalak fogalmát. A normálalakra nem a matematikának van szüksége, hanem a kémiának és a fizikának azon praktikus okból adódóan, hogy nagyon kicsi és nagyon nagy számokkal is tudjanak a gyerekek számolni. Miután mindezt megtanulták 7. és 8. osztályban, általában a 11. évfolyamon találkoznak a logaritmus fogalmával. Matematikailag ez a felépítés következetes.

A logaritmus fogalmának bevezetését azért kell megelőznie a hatványozásnak, majd a hatványfogalom kiterjesztésének tört és irracionális kitevőre, mert az exponenciális függvény folytonos függvény. Miután a logaritmus fogalmának bevezetését azonnal követi a fogalom matematikai kiterjesztése – a logaritmus függvény bevezetése, és logaritmikus egyenletek megoldása – mindez a fent felsorolt ismeretek nélkül lehetetlen lenne.

A matematika tanulásának előrehaladásával a fogalmak és ismeretek egyre több asszociációs szálon kapcsolódnak egymáshoz, és minden fogalmat úgy tekinthetünk, mint egy csomópontot egy nagyon bonyolult hálón. Természetesen az emberi gondolkodástól nem idegen az ilyen fogalomalkotás, hiszen a nyelvi fogalmak (szavak) ugyanilyen bonyolult hálót alkotnak.

A 20. század elején élő Ferdinand de Saussure nevét érdemes megemlíteni. Saussure a hagyományos leíró nyelvtan tudományos jellegének tagadásából jutott el a nyelv rendszerszerűségének felismeréséig. Saussure egy olyan nyelvtudomány létjogosultságát, sőt nagyra hivatottságát vallotta, amely a nyelv állapotát, a nyelvrendszert teszi tudományos vizsgálat tárgyává. Számos az egész nyelvtudományt megújító felfedezése volt, többek között ő vezette be a memoriális asszociációs sorok fogalmát. Nézzünk erre egy példát: a „tanítás" szó milyen ismérvek alapján kapcsolható a nyelv más szavaihoz? (Saussure eredeti példáját lásd itt ⇒.)

Az azonosságok tanításáról III.



Saussure szerint bármely szó mindig mindazt felidézheti, ami az egyik vagy másik módon vele asszociálható, tehát a fenti ábra minden szava további asszociációk kiindulópontja vagy folytatása. Úgy gondolom, hogy ez a nyelvi elképzelés – szerkezetét tekintve – maradéktalanul átvihető a matematikai fogalmak között meglévő kapcsolatokra.

A matematika tanítása során mindig egy adott úton haladva építjük fel a fogalmakat, ugyanakkor tisztában kell lennünk azzal, hogy más utat is járhatnánk. (Ha a matematika oktatásának hazai történetét nézzük, akkor akár csak a 70-es évektől kezdve is több példát találunk erre. Volt időszak, amikor halmazszemlélet központú volt az oktatás, később ezt felváltotta a függvényközpontú szemlélet.) Azt is tudnunk kell, hogy minden fogalomhoz nagyon sok asszociáció kapcsolódik. Ezek az asszociációk teszik lehetővé a matematikai megértést, ugyanakkor a nem lényeges tulajdonságokat tükröző asszociációk vezetnek el a hamis analógiákhoz. Megítélésem szerint bármely matematikai fogalom akkor válik igazán hatékonnyá, a gyerekek akkor ismerik fel jól a problémákat, ha a helyes asszociációk jól kialakulnak.

Ezután a kis nyelvészeti kitérő után térjünk vissza a logaritmushoz. Ahogyan a törtek, úgy a logaritmus is két számot kapcsol össze. A logaritmus, mint a mennyiségek megjelölésének új módja, ismét felveti a kérdést, hogyan tudunk jelölni két szám között egy viszonyt. Ebben az értelemben a logaritmus, mint jel erős rokonságot mutat a törtekkel. A tanítás során érdemes erre hivatkozni, mert a gyerekek sokkal könnyebben megértik a logaritmus jelét, ha korábbi ismerethez tudják azt kötni.

A törtek esetében számlálóról és nevezőről beszélünk, a logaritmus esetében alapról és hatványértékről. Ezzel a két mennyiséggel azt a számot adjuk meg, amelyikre az alapot hatványozva az adott hatványértéket kapjuk. Ahogyan a törtek esetében a két szám egymáshoz és a törtvonalhoz képest történő elhelyezkedése adja meg a jelentésüket, úgy a logaritmus esetében is az elhelyezkedésüktől függ a tartalmuk:

$\log_2 8$ - a 2 az alap és a 8 a hatványérték.

Ahogyan a gyökös jelölés bevezetésénél, úgy itt is érdemes a gyerekeket arra kérni, hogy adjanak meg egész és tört számokat az új jel segítségével:

$$4 = \log_2 16$$

$$-2 = \log_3 \frac{1}{9}$$

$$\frac{3}{4} = \log_3 \sqrt[4]{27}$$

$$-\frac{2}{3} = \log_4 \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$$

Amikor a gyerekek megértik az új jel lényegét, akkor megadhatjuk a logaritmus szabatos definícióját:

Legyen *a>0, a≠1* és *b>0.* Az $a^x = b$ egyenlet egyetlen gyökét $\log_a b$ -vel jelöljük.

Ezután következhet a logaritmussal, mint új fogalommal a következő hat (a 4. pontban kétfélét adtunk meg) következtetési típus elvégzése. Mint korábban említettem a fogalmak matematikai értelemben vett kialakítása befejeződik a definíció megadásával, a gondolkodás szempontjából azonban akkor tekinthetjük befejezettnek a fogalom felépítését, ha a gyerekek képesek a fogalomhoz kapcsolódó egyszerű következtetésekre.

1. Fel tudják írni hatványalakban a következő kifejezést:
   $\log_2 \frac{1}{64} = -6$
2. Fel tudják írni a *log* jelölés segítségével a hatványalakban megadott kifejezéseket:
   $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2$
3. Meg tudják adni a következő kifejezés értékét:
   $\log_{16} \frac{1}{2}$
4. Meg tudják oldani a következő egyszerű egyenleteket:
   $\log_{\frac{1}{2}} b = 2$

   $\log_a \sqrt{2} = \frac{1}{4}$
5. Értelmezni tudják a következő kifejezést:
   $3^{\log_3 7}$

Amikor a logaritmus, mint új jelölés létrejött, akkor összefoglalásként érdemes megmutatni a következő táblázatot, amelyik a hatványozás különböző aspektusait hozza kapcsolatba. A hatványalak az alap a kitevő és a hatványérték közötti kapcsolat. Ezek közül bármelyik két számmal meg tudjuk adni a harmadikat, és ezt egy megfelelő szimbólum segítségével jelölni is tudjuk. A három mennyiség közül azt a kettőt, amelyiket adottnak tekintjük, *x*-szel jelöljük.

Alap **a**	***Kitevő*** α	***Hatványérték*** a^α
x	x	a^α
$\sqrt[\alpha]{x} = x^{\frac{1}{\alpha}}$	x	x
x	$\log_a a^\alpha$	x

Ha bevezettünk egy új jelet, akkor a korábban ismertetett szimbólumokhoz hasonlóan itt is el kell végeznünk a következő feladatokat:

1. Az új jelet be kell illesztenünk az eddig ismert számírási lehetőségeink közé.
2. Meg kell alkotnunk az új jelölésre a számolási szabályokat, ami alatt itt is azt fogjuk érteni, hogy logaritmus alakban megadott mennyiségekkel végzett műveletek eredményét meg tudjuk-e adni logaritmus alakban. Ez a mondat így értelmetlen…
3. Meg kell oldanunk a rendezést, tehát össze kell tudnunk hasonlítani a logaritmus alakban megadott mennyiségeket.

Ezek után jöhet a logaritmus fogalmának matematikai kiterjesztése: a logaritmus függvény definíciója, logaritmikus egyenletek megoldása.

Irodalomjegyzék

Ferdinand de Saussure:
Bevezetés az általános nyelvészetbe – Gondolat Kiadó, Budapest,1967.
Pósa Lajos:
Összefoglalás – Calibra Kiadó, Budapest, 1999.
Majoros Mária:
Oktassunk vagy buktassunk? – Calibra Kiadó, Budapest, 1992.

Kedves Olvasóim!

Ezzel befejezzük a matematikai szimbólumok bevezetésével és használatával, számolási szabályainak (azonosságok) tanításával foglalkozó fejtegetéseket.

Januárban a matematika tanításának valami egészen új megközelítésével szeretnék foglalkozni. Amikor megtervezzük a munkánkat, akkor általában tananyaghoz kötjük a tevékenységeket. A januári írásomban szeretném megfordítani ezt a kapcsolatot, és egy tevékenységet fogok kiválasztani: a mérést. Megpróbálok minél több matematikai tartalmat összegyűjteni, és azt illusztrálni, hogyan jelenik meg a mérés, mint központi tevékenység a különböző, esetenként nagyon távol álló matematikai fogalmak kialakításában.

Minden olvasómnak köszönöm a megtisztelő figyelmet, amivel ezeket az írásokat követte, és nagyon boldog, békés új esztendőt kívánok.

Budapest, 2006. 12. 27. dr. Majoros Mária