Szoldatics József: Úton-módon

Egy feladat és ami róla az eszembe jutott...

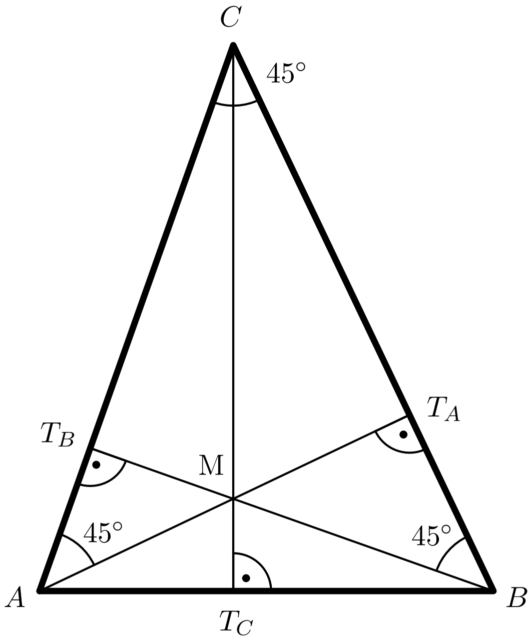
A mai számban egy geometriai feladatot járunk körbe, amelyet Laczkó László kollégám dolgozott fel. Az anyag megtalálható a Fazekas Gimnázium Ma tematika Portálján (matek.fazekas.hu) a cikkek között, „Ismételjük a geometriát egy feladaton keresztül!" címmel. A cikk címe nagyon talkáló, pont ez van a cikk készítésének ötlete mögött. Az ott szereplő megoldásuk közül válogatok és mutatok meg néhányat.

A feladat

Az ABC hegyesszögű háromszög C-nél levő szöge 45°. M a háromszög magasságpontja. Bizonyítsuk be, hogy $CM = AB$!

1. Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



A BT_BC háromszög derékszögű és egyenlő szárú, hiszen

$$T_BBC\sphericalangle = T_BCB\sphericalangle = 45°$$

Ezért

$$CT_B = T_BB$$

Az AT_BM háromszög is derékszögű és egyenlő szárú, hiszen

$$T_BAM\sphericalangle = T_BMA\sphericalangle = 45°$$

Ezért

$$AT_B = T_BM$$

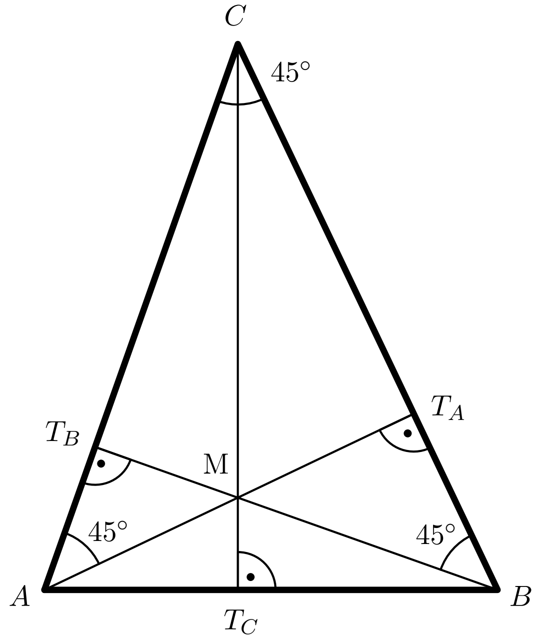
A CMT_B és AT_BB háromszögek egybevágók, mert két-két oldaluk ($T_BC = T_BB$ és $T_BM = T_BA$) és közbezárt szögük egyenlő ($= 90°$).
Ezért a harmadik oldaluk is megegyezik, azaz

$$AB = CM.$$

És ezt akartuk bizonyítani.

2. Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



$T_BBA\sphericalangle$ és $ACM\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek, ezért

$$T_BBA\sphericalangle = ACM\sphericalangle$$

Az AT_BB és CMT_B háromszögek derékszögűek.
A $CAB\sphericalangle$ szög (és a derékszög) közös ebben a két háromszögben, tehát hasonlóak.
A BT_B és CT_B egymásnak megfelelő oldalak egyenlőek, mert a CBT_B háromszög egyenlő szárú derékszögű (1. megoldás) ezért a két háromszög egybevágó, azaz

$$AT_BB\triangle \cong CMT_B\triangle$$

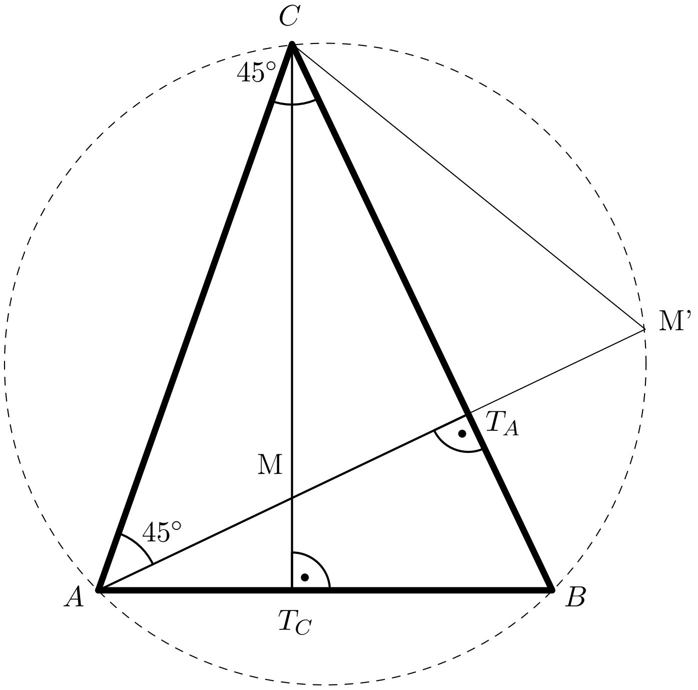
Ebből következik, hogy minden megfelelő oldal egyenlő, azaz

$$CM = AB.$$

És ezt akartuk bizonyítani.

3. Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Tükrözzük tengelyesen az M pontot a CB oldalra, a tükörképet M' jelöli.
Ismeretes, hogy a magasságpontot az oldalra tengelyesen tükrözve a tükörkép (M') pont a háromszög köré írt körön van.
A tükrözés miatt

$$CM = CM'$$

Ugyanakkor

$$CAM\sphericalangle = CAM'\sphericalangle = 45°$$

Az AB és CM' húrok ugyanabban a körben vannak és mind a kettőhöz 45°-os kerületi szög tartozik, tehát

$$AB = CM'$$

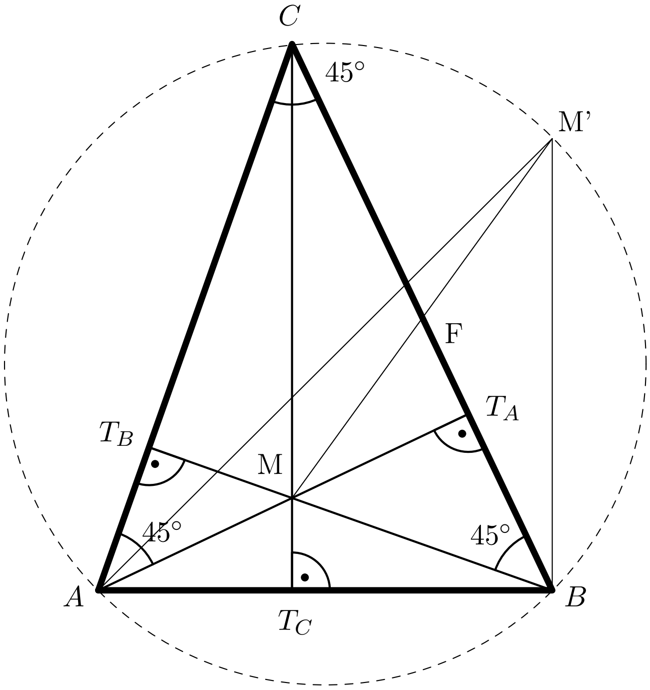
Mivel $CM' = CM$, így

$$CM = AB.$$

És ezt akartuk bizonyítani.

4. Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



A CM szakaszt CB oldal felezőpontjára (F) tükrözve kapjuk BM'-t.
Ismeretes, hogy M' a körülírt körön van.
A középpontosan tükrözött szakasz párhuzamos a képével. A CT_C magasság merőleges az AB alapra, tehát

$$M'BA\sphericalangle = 90°$$

$AM'B\sphericalangle = 45°$, mert AB ívhez tartozó kerületi szög.
$AM'B$ egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért

$$BM' = AB$$

A tükrözés miatt

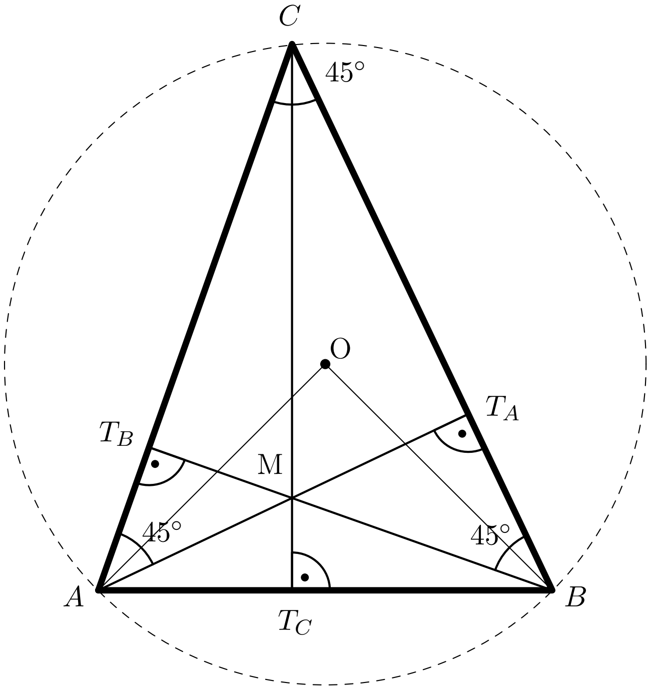
$$CM = BM'$$

ezért

$$CM = AB.$$

5. Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Legyen O a háromszög köré írható körének középpontja.
Az $\overrightarrow{OM}$ vektort jelölje $\underline{m}$, az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ és $\overrightarrow{CM}$ vektorokat rendre $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$.
Felhasználjuk, hogy a magasságpontba mutató vektorra

$$\underline{m} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$$

Ebből d vektorra kapjuk

$$\underline{d} = \underline{m} - \underline{c} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} - \underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$$

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma egyik átlója AB, a másik CM.
A kerületi és középponti szögek tétele miatt

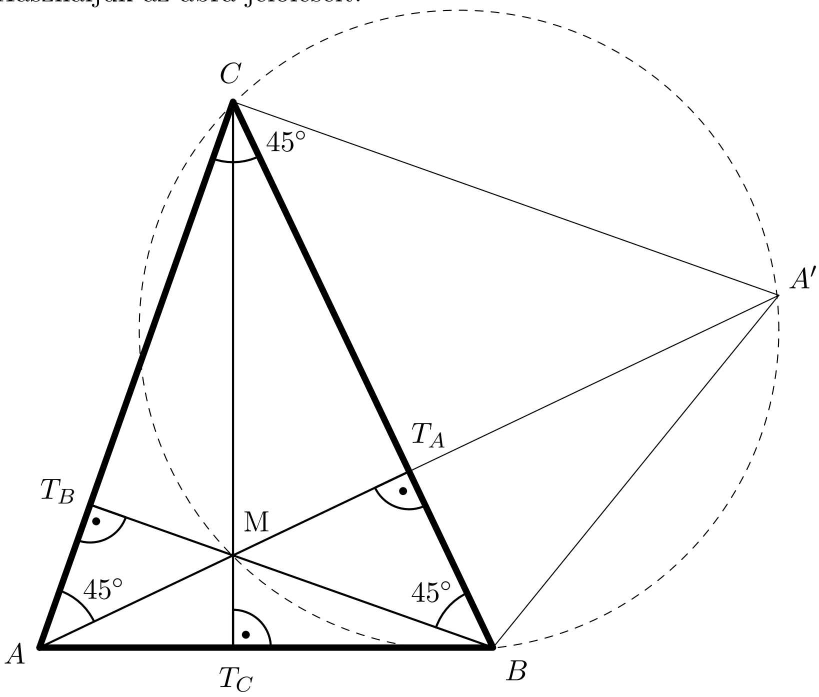
$$BOA\sphericalangle = 90°$$

Így az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma négyzet, mert az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorok hossza a köré írt kör sugarával egyenlő.
A négyzet átlói egyenlőek, így

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CM}| \qquad \Rightarrow \qquad AB = CM$$

6. Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!

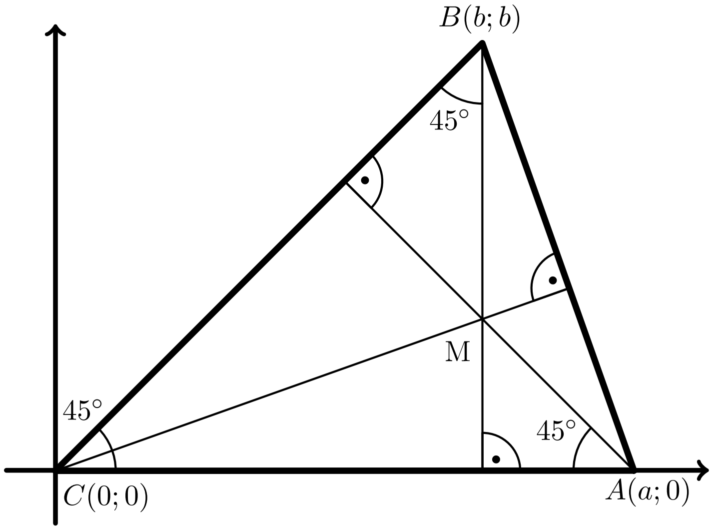


A CB oldalra tükrözzük az ABC háromszöget, A tükörképe legyen A'.
$CAT_A\sphericalangle$ és a tükörképe, $CA'T_A\sphericalangle$ is $45°$, valamint $CBT_B\sphericalangle$ is annyi.
Ezért CM szakasz $45°$-os látókörén van B és A' is.
$A'CA\sphericalangle = 90°$ a tükrözés miatt, ezért BM szakasz párhuzamos $A'C$ szakasszal, így $CMBA'$ húrtrapéz, melynek szárai CM és $A'B$ egyenlőek.
Ezért

$$AB = CM$$

7. Megoldás

Tegyük koordináta-rendszerbe a feladatot úgy, hogy a C csúcs az origóba, az A csúcs az X telyre essen. Használjuk az ábra jelöléseit!



A csúcsok koordinátái:
$A(a;0)$, hiszen az X tengelyen van.
$B(b;b)$, hiszen az $y=x$ egyenes egy pontja.
$C(0,0)$, hiszen az origóban van.
Az AM egyenes merőleges CB-re, aminek a meredeksége 1, ezért egyenlete

$$y = -x + a$$

Az M pont esetén $x = b$ és innen az $y = a - b$, M pont koordinátája

$$M(b, a-b)$$

. Az A és B pontok távolsága

$$AB = \sqrt{(a-b)^2 + b^2}$$

a C és M pontok távolsága

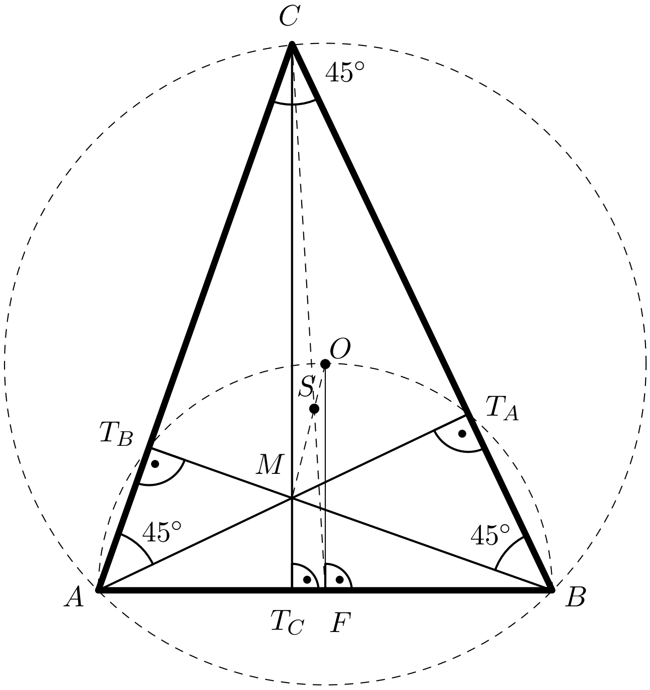
$$CM = \sqrt{b^2 + (b-a)^2}$$

Látható, hogy

$$AB = CM$$

8. Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Legyen O a háromszög köré írható kör középpontja, F az AB oldal felezőpontja, S a háromszög súlypontja. M a háromszög magasságpontja.
Tudjuk, hogy S harmadolja az OM szakaszt.
Valamint S harmadolja az CF súlyvonalat.
Kerületi és középponti szögek tétele miatt AOB háromszög derékszögű, és egyenlő szárú.
Mivel OF az AB Thales körének sugara,

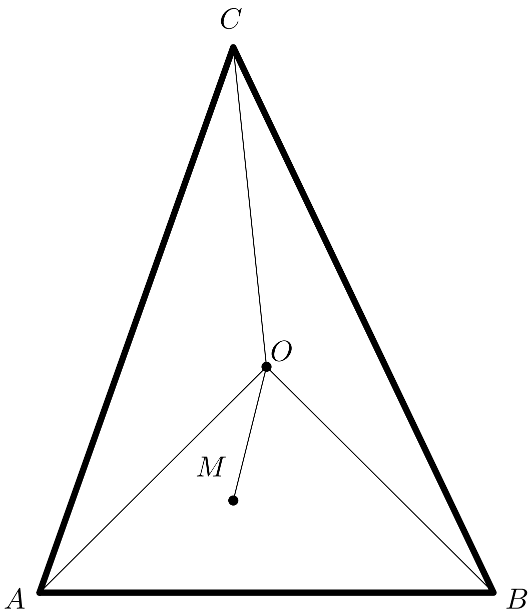
$$2OF = AB$$

AB pedig az átmérője.
Tudjuk, hogy az S-re vonatkozó (-2) szeres nagyítás FO szakaszt CM szakaszba viszi. Így

$$CM = 2FO = AB$$

9. Megoldás

Helyezzük el a háromszöget a Gauss-féle komplex számsíkon úgy, hogy a háromszög köré írt kör középpontja (O) az origó legyen. Használjuk az ábra jelöléseit!



A kerületi és középponti szögek tétele miatt $AOB\sphericalangle = 90°$, és $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{BO}|$ ezért

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot i$$

Ekkor

$$AB = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}(1-i)| = \sqrt{2}|\overrightarrow{OA}|$$

Ismert, hogy $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, így

$$MC = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}(1+i)| = \sqrt{2}|\overrightarrow{OA}|$$

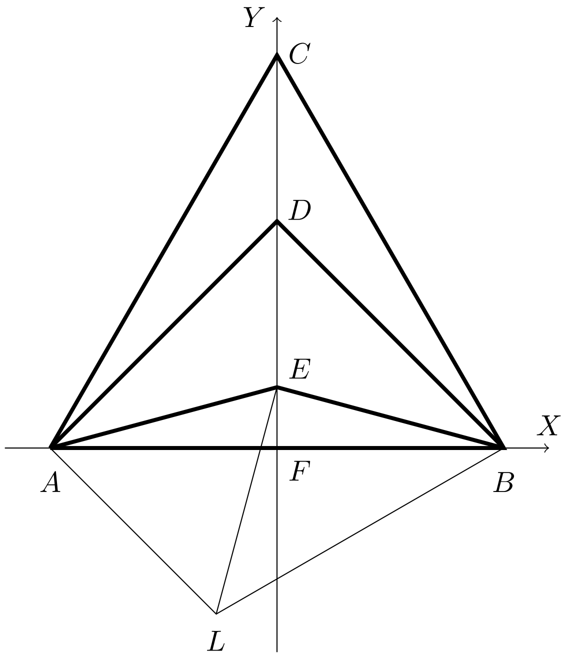
ami azt jelenti, hogy

$$AB = MC$$

Visszacsatolás

Az Úton-módon 1. cikkében levő feladattal kapcsolatban ismét kaptam megoldásokat. Most Tatár Zsuzsanna Mária kolléganő írt 6 megoldást. A megoldások „nem vágnak teljesen bele” az eredeti elképzelésbe, hogy elemi megoldást adjunk a feladatra. Azért a küldött megoldások küzül – szubjektíven – egyet kiválasztottam, amit most megmutatok.

Tatár Zsuzsanna Mária, Esztergom megoldása
Tegyük koordináta-rendszerbe az ábránkat! Az alap háromszög oldala legyen 2 egység.



Ekkor a pontok koordinátái (rövid számolással adódnak):

$$A\,(-1;0)\,; \qquad B\,(1;0)\,; \qquad C\left(0;\sqrt{3}\right); \qquad D\,(0;1)\,; \qquad E\left(0;2-\sqrt{3}\right); \qquad F\,(0;0)$$

Forgassuk el az $\overrightarrow{EB}$ vektort 90 fokkal az óramutató járásával megegyező irányba. Így megkapjuk az $\overrightarrow{EL}$ vektort.

$$\overrightarrow{EB}\left(1;\sqrt{3}-2\right)$$

$$\overrightarrow{EL}\left(\sqrt{3}-2;-1\right)$$

$\overrightarrow{FL}$ helyvektor végpontja megadja az L pont koordinátáit.

$$\overrightarrow{FL}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EL}$$

$$\overrightarrow{FL}(\sqrt{3}-2;1-\sqrt{3})$$

$$L(\sqrt{3}-2;1-\sqrt{3})$$

Tekintsük az AEL háromszög oldalainak hosszát:

$$AE=\sqrt{1^2+(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$EL=\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2+1}=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$AL=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Tehát az AEL háromszög szabályos, LEB háromszög derékszögű.

$$AEB\sphericalangle=60^\circ+90^\circ=150^\circ$$

Zárszó

Kedves Olvasó! Ha egy másik „szép” megoldást talál, kérem küldje el nekem a szolda@fazekas.hu e-mail címre. Ezeket az újabb megoldásokat összegyűjtve időnként (terveim szerint) szintén megmutatnám.

Megemlékezés

65 éves korában elhunyt Petz György szerkesztő, író, költő, tanár, a Szépírók Társasága tagja. A nyugdíjba vonulása előtti években a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium tanára volt, kollégámat tisztelhettem benne.

Miért írom mindezt?

Mikor e cikksorozat címét kerestem, hozzá fordultam ötletekért. Elmondtam neki, hogy mi lenne a cikkekben, hogyan is gondolom. Persze – akik ismerték, tudják róla, mindig viccelt – néhány tréfás megjegyzést tett némi mosoly kíséretében a felvetésre. Ám rövid időn belül sok javaslatot tett elém, végül is az „Úton-módon” cím nyert.

Szóval, e sorozat nevének volt az ötletgazdája. Ezen pár mondat, emlék e miatt íródott.