Szoldatics József: Úton-módon

Egy feladat és ami róla az eszembe jutott...

A mai számban egy olyan algebra feladatot járunk körbe, amely sokféle témakör között teremt kapcsolatot. Bár leggyakrabban a teljes indukció tanítása során találkozunk vele, ismert algebrai átalakításokat felhasználó megoldása is, megközelíthetjük kombinatorikai eszközökkel és rekurzióval is. Cikkemben ezekre a módszerekre több változatot is be fogok mutatni. A feladat a KöMaL 2020. márciusi számában is jelent meg a „Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire” cikkben.

A feladat

Bizonyítsuk be, hogy $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$; ahol $n \in \mathbb{N}^+$

Használt összefüggések

A feladat megoldása során a következő ismert algebrai összefüggéseket használom:

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{{n(4n^2-1)}^2}{3}$

1. Megoldás

Bontsuk fel a $k \cdot (k+1)$ kifejezést,

$$k \cdot (k+1) = k^2 + k$$

alakba és használjuk ezt fel a bal oldal összegezésére!

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \\
&= 1 \cdot (1+1) + 2 \cdot (2+1) + \ldots + n \cdot (n+1) = \\
&= \left(1^2 + 1\right) + \left(2^2 + 2\right) + \ldots + \left(n^2 + n\right) = \\
&= \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) + (1 + 2 + \ldots + n) = \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \left[\frac{2n+1}{3} + 1\right] = \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2n+4}{3} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2\,(n+2)}{3} = \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

2. Megoldás

Bontsuk fel ismét a $k \cdot (k+1)$ kifejezést, de most a

$$k \cdot (k+1) = [(k+1)-1] \cdot (k+1) = (k+1)^2 - (k+1)$$

alakba és használjuk ezt fel a bal oldal összegezésére!

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \\
&= (2-1) \cdot 2 + (3-1) \cdot 3 + \ldots + [(n+1)-1] \cdot (n+1) = \\
&= \left(2^2 - 2\right) + \left(3^2 - 3\right) + \ldots + \left((n+1)^2 - (n+1)\right) = \\
&= \left(2^2 + 3^2 + \ldots + (n+1)^2\right) - (2 + 3 + \ldots + (n+1)) = \\
&= \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n+1)^2\right) - (1 + 2 + 3 + \ldots + (n+1)) = \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot \left[\frac{2n+3}{3} - 1\right] = \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot \frac{2n}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

3. Megoldás

Az ötletet a megoldáshoz ismét a $k \cdot (k+1)$ kifejezés adja. Ezt a kifejezést én már láttam, méghozzá a $(2k+1)^2$-ben,

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4 \cdot k \cdot (k+1) + 1$$

Tehát

$$k \cdot (k+1) = \frac{(2k+1)^2 - 1}{4}$$

Alkalmazva

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \\
&= \frac{3^2 - 1}{4} + \frac{5^2 - 1}{4} + \ldots + \frac{(2n+1)^2 - 1}{4} = \\
&= \frac{3^2 + 5^2 + \ldots + (2n+1)^2}{4} - \frac{n}{4} = \\
&= \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n+1)^2}{4} - \frac{n+1}{4} = \\
&= \frac{(n+1)\dfrac{4n^2+8n+3}{3}}{4} - \frac{n+1}{4} = \frac{(n+1)(4n^2+8n+3)}{12} - \frac{n+1}{4} = \\
&= \frac{(n+1)(4n^2+8n+3)}{12} - \left[\frac{3(n+1)}{12}\right] = \\
&= \frac{n+1}{4} \cdot \frac{4n^2+8n}{3} = \frac{n+1}{4} \cdot \frac{4n(n+2)}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

4. Megoldás

Az ötletet a megoldáshoz ismét a $k\cdot(k+1)$ kifejezés adja. Ezt a kifejezést én már láttam, , méghozzá a $(k+1)^3$-ben

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = k^3 + 1 + 3\left[k(k+1)\right]$$

Tehát

$$k \cdot (k+1) = \frac{(k+1)^3 - k^3 - 1}{3}$$

Alkalmazva

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \\
&= \frac{2^3 - 1^3 - 1}{3} + \frac{3^3 - 2^3 - 1}{3} + \ldots + \frac{(n+1)^3 - n^3 - 1}{3} = \\
&= \frac{2^3 + 3^3 + \ldots + (n+1)^3}{3} - \frac{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{3} - \frac{n}{3} = \\
&= \frac{(n+1)^3 - 1^3 - n}{3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3} = \frac{n(n^2 + 3n + 2)}{3} = \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

5. Megoldás

Az ötletet a megoldáshoz ismét a $k \cdot (k+1)$ kifejezés adja. Itt két egymás utáni szám van összeszorozva, de az ezen számok előtti és utáni két szám különbsége 3, azaz $(k+2)-(k-1)=3$. Használjuk ezt

$$\begin{aligned} k \cdot (k+1) &= \frac{3k \cdot (k+1)}{3} = \frac{[(k+2)-(k-1)]\, k \cdot (k+1)}{3} = \\ &= \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{3} - \frac{(k-1) \cdot k \cdot (k+1)}{3} \end{aligned}$$

Ezt az azonosságot alkalmazzuk n-től 2-ig

$$\begin{aligned} n \cdot (n+1) &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3} - \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3} \\ (n-1) \cdot n &= \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3} - \frac{(n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{3} \\ (n-2) \cdot (n-1) &= \frac{(n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{3} - \frac{(n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1)}{3} \\ & \dots \\ 3 \cdot 4 &= \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3} \\ 2 \cdot 3 &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} \\ 1 \cdot 2 &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} - \frac{0 \cdot 1 \cdot 2}{3} \end{aligned}$$

Összeadva a felírt egyenleteket, a jobb oldalon 2 kifejezés kivételével minden kétszer szerepel, a két kifejezés egymás ellentettje, ezért kapjuk

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3} - \frac{0 \cdot 1 \cdot 2}{3}$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$$

6. Megoldás

Az ötletet a megoldáshoz ismét egy kifejezés, a $k \cdot (k+1) + (k+1) \cdot (k+2)$ adja. Ezek a bal oldal egymás utáni 2 tagja.

$$k \cdot (k+1) + (k+1) \cdot (k+2) = (k+1) \cdot [k + (k+2)] = 2 \cdot (k+1)^2$$

Induljunk ki a bal oldalból, legyen $n = 2k$ és párosítsunk

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \ldots + (n-1) \cdot n + n \cdot (n+1) = \\
&= \underbrace{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3} + \underbrace{3 \cdot 4 + 4 \cdot 5} + \ldots + \underbrace{(2k-1) \cdot 2k + 2k \cdot (2k+1)} = \\
&= 8 \cdot 1^2 + 8 \cdot 2^2 + \ldots + 8 \cdot k^2 = 8 \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = 4 \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{3} = \\
&= \frac{2k(2k+2)(2k+1)}{3} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}
\end{aligned}$$

Legyen most $n = 2k+1$, ekkor

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \ldots + (n-1) \cdot n + n \cdot (n+1) = \\
&= \underbrace{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3} + \underbrace{3 \cdot 4 + 4 \cdot 5} + \ldots + \underbrace{(2k-1) \cdot 2k + 2k \cdot (2k+1)} + (2k+1) \cdot (2k+2) = \\
&= 8 \cdot 1^2 + 8 \cdot 2^2 + \ldots + 8 \cdot k^2 + (2k+1) \cdot (2k+2) = \\
&= 8 \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (2k+1) \cdot (2k+2) = \\
&= 4 \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{3} + (2k+1) \cdot (2k+2) = \\
&= \frac{2k(2k+2)(2k+1)}{3} + (2k+1) \cdot (2k+2) = \\
&= (2k+1) \cdot (2k+2) \cdot \left[\frac{2k}{3} + 1\right] = \\
&= \frac{(2k+1)(2k+2)(2k+3)}{3} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}
\end{aligned}$$

7. Megoldás

Ennyi algebra megoldás után nézzünk most valami mást!
Tekintsük a következő feladatot:

Adott $n+2$ különböző magasságú diák, közülük 3 diákot választunk ki. Hányféleképpen tudjuk ezt megtenni?
Adunk rá 2 megoldást.

I. megoldás
Mivel a diákok különbözőek, kiválasztási sorrendjük nem érdekes, 1 diák csak egyszer választható ki, ezért ez egy ismétlés nélküli kombinációs feladat, aminek a megoldása

$$\binom{n+2}{3}$$

II. megoldás
Állítsuk a diákokat magassági sorrendbe.
A legkisebb diák szerint 2 eset van, vagy szerepel – ez $\binom{n+1}{2}$ eset – vagy nem.
Ha a legkisebb nem szerepel a kiválasztottak között, akkor vegyük a második legkisebbet. Az ő szemszögéből is most ket eset van, vagy szerepe – ez $\binom{n}{2}$ eset – vagy nem.
és így tovább az utolsó 3 diákig, azaz $\binom{2}{2}$-ig.
Tehát a lehetséges kiválasztások száma

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n+1}{2}$$

Két megoldást is adtunk a feladatra, a végeredmény ugyanaz

$$\begin{aligned}
\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n+1}{2} &= \binom{n+2}{3}\\
\frac{2!}{2!\cdot 0!}+\frac{3!}{2!\cdot 1!}+\frac{4!}{2!\cdot 2!}+\ldots+\frac{(n+1)!}{2!\cdot(n-1)!} &= \frac{(n+2)!}{3!\cdot(n-1)!}\\
1+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\ldots+\frac{n(n+1)}{2} &= \frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}\\
1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

8. Megoldás

Ismét egy kombinatorikus megoldást adunk.
Tekintsük a következő feladatot, ami a 7. megoldásánál is néztünk:

Adott $n+2$ különböző magasságú diák, közülük 3 diákot választunk ki. Hányféleképpen tudjuk ezt megtenni?
Feladat megoldása
Mivel a diákok különbözőek, kiválasztási sorrendjük nem érdekes, 1 diák csak egyszer választható ki, ezért ez egy ismétlés nélküli kombinációs feladat, aminek a megoldása

$$\binom{n+2}{3}$$

Alakítsuk át kifejezésünket, közben használjuk a binomiális együtthatókra igaz képzési szabályt

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Kiindulunk a kapott végeredményből és a szabályt használva alakítunk

$$\begin{aligned}
\binom{n+2}{3} &= \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} = \\
&= \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} \\
&= \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} \\
&= \dots \\
&= \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = \\
&= \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}
\end{aligned}$$

Azaz kaptuk

$$\binom{n+2}{3} = \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}$$

Most alakítsuk a kapott azonosságot a 9. megoldáshoz hasonlóan

$$\begin{aligned}
\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n+1}{2} &= \binom{n+2}{3} \\
\frac{2!}{2!\cdot 0!} + \frac{3!}{2!\cdot 1!} + \frac{4!}{2!\cdot 2!} + \dots + \frac{(n+1)!}{2!\cdot(n-1)!} &= \frac{(n+2)!}{3!\cdot(n-1)!} \\
1 + \frac{2\cdot 3}{2} + \frac{3\cdot 4}{2} + \dots + \frac{n(n+1)}{2} &= \frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3} \\
1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \dots + n(n+1) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

9. Megoldás

A megoldás a „szokásos”.

Teljes indukcióval bizonyítunk!
I. Eset
Nézzük meg, hogy teljesül-e a bizonyítandó állítás $n = 1$ esetre

$$n = 1 \qquad\qquad 1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$$

A vizsgált esetre teljesül az állítás.
II. Eset
Tegyük fel, hogy $n = k$-ra tejesül, hogy

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k \cdot (k+1) = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{3}$$

III. Eset
Nézzük az $n = k + 1$ esetet, induljunk ki a bizonyítandó állítás bal oldalból

$$\begin{aligned} &1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k \cdot (k+1) + (k+1) \cdot (k+2) = \\ &= \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{3} + (k+1) \cdot (k+2) = \\ &= (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3} + 1\right) = (k+1)(k+2)\frac{k+3}{3} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

azaz

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k \cdot (k+1) + (k+1) \cdot (k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

és ezt akartuk kapni, tehát a bizonyítás kész.

10. Megoldás

És végül nézzünk most egy „kemény” megoldást, kezeljük a feladatot rekurzív módon. Legyen

$$f_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1)$$

egy sorozat eleme. Ekkor rekurzív módon megfogalmazva a feladatot

$$f_1 = 1 \cdot 2 = 2; \qquad f_n = f_{n-1} + n \cdot (n+1);\ n \geq 2$$

Átírva a sorozatot

$$f_1 = 1 \cdot 2 = 2; \qquad n \cdot \frac{f_n}{n} = (n-1) \cdot \frac{f_{n-1}}{n-1} + n \cdot (n+1);\ n \geq 2$$

Vezessünk be új sorozatot: $g_n = \dfrac{f_n}{n}$. Ekkor a keresett sorozat

$$g_1 = 2; \qquad n \cdot g_n = (n-1) \cdot g_{n-1} + n \cdot (n+1)$$

A g_n sorozatot keressük $h_n + an^2 + bn + c$ alakban.

$$\begin{aligned} g_1 &= h_1 + a + b + c \\ g_n &= h_n + an^2 + bn + c \\ g_{n-1} &= h_{n-1} + a(n-1)^2 + b(n-1) + c \end{aligned}$$

Ezt használva

$$n \cdot g_n = (n-1) \cdot g_{n-1} + n \cdot (n+1)$$

$$n \cdot \left[h_n + an^2 + bn + c\right] = (n-1) \cdot \left[h_{n-1} + a(n-1)^2 + b(n-1) + c\right] + n \cdot (n+1)$$

rendezve

$$n \cdot h_n = (n-1) \cdot h_{n-1} + \underbrace{n^2(1-3a) + n(1+3a-2b) + (-a+b-c)}$$

Ha úgy választjuk meg a, b és c értékét, hogy a megjelölt kifejezés nulla minden n értékére, akkor egyszrű lesz a helyettesítés h_n sorozatra. Mivel a kifejetés másodfokú, ezért ez csak akkor lesz minden értékre nulla, ha az együtthatói nullák, azaz

$$\begin{cases} 1 - 3a = 0 \\ 1 + 3a - 2b = 0 \\ -a + b - c = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{1}{3};\ b = 1;\ c = \frac{2}{3}$$

$$g_n = h_n + \frac{1}{3}n^2 + n + \frac{2}{3}$$

Tehát a h_n sorozatra

$$h_1 := 0; \qquad n \cdot h_n = (n-1) \cdot h_{n-1}$$

A képzési szabályt felírva

$$\begin{aligned} n \cdot h_n &= (n-1) \cdot h_{n-1} \\ (n-1) \cdot h_{n-1} &= (n-2) \cdot h_{n-2} \\ &\ldots \\ 3 \cdot h_3 &= 2 \cdot h_2 \\ 2 \cdot h_2 &= 1 \cdot h_1 = 0 \end{aligned}$$

Visszafelé követve az egyenleteket adódik, hogy

$$n \cdot h_n = 0; \qquad \Rightarrow \qquad h_n = 0$$

$$g_n = h_n + an^2 + bn + c = 0 + \frac{1}{3}n^2 + n + \frac{2}{3}$$

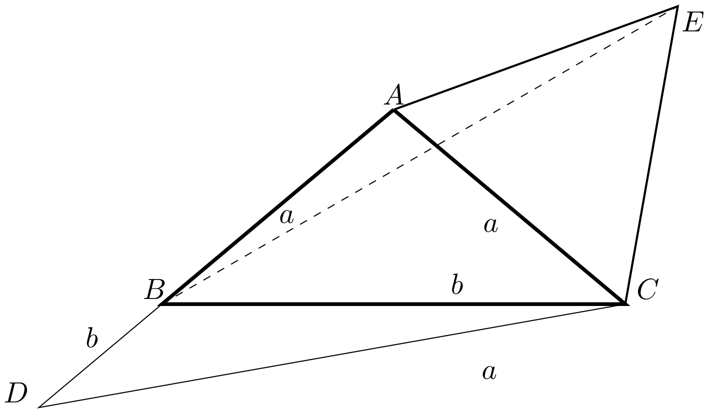
$$\frac{f_n}{n} = g_n = \frac{1}{3}n^2 + n + \frac{2}{3}$$

$$f_n = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Visszacsatolás

Az Úton-módon 1. cikkében levő feladattal kapcsolatban többen is jelezték, hogy az már kitűzésre került a Matematika Tanítása folyóiratban és az 1986 évi 4. számban jelentek is meg megoldások. Az ott szereplő 4 megoldás közül most Róka Sándor megoldását ismertetem az eredeti leírással. Róka Sándor bemutatása – úgy gondolon – nem szükséges, közismert.

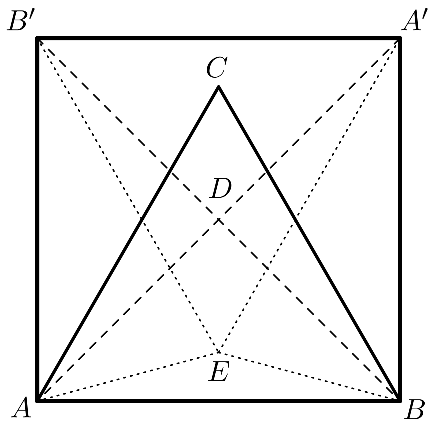
Róka Sándor megoldása
Emeljünk az AC oldalra kifelé ACE szabályos háromszöget.



Az $ADC\triangle$ egybevágó a $BCE\triangle$–gel, mert $BC = AD$, $CE = AC$ és $BCE\sphericalangle = CAD\sphericalangle = 100°$. Mivel $BAE\triangle$ egyenlő szárú és szárszöge $160°$, így $AEB\sphericalangle = 10°$, tehát $BEC\sphericalangle = 50°$ és $CDA\sphericalangle = EBC\sphericalangle = 30°$. A $BCD\triangle$ szögei tehát: $140°$, $30°$ és $10°$.

Az Úton-módon 2. cikkében levő feladattal kapcsolatban is érkezett visszajelzés. A levélíró Laborczi Zoltán, aki a Győri Révai Miklós Gimnáziumban érettségizett 1967-ben és azon évben az IMO csapatnak is tagja volt IV. osztályosként és III. díjat nyert. Most matematikus, nyugdíjas informatikus.

Laborczi Zoltán megoldása
A 4. megoldáshoz hasonlóan tükrözzük az ABC háromszöget a D pontra.



Ekkor az C tükörképe E. Az így kapott $ABA'B'$ négyszög négyzet, hiszen átlói merőlegesek és egyenlő hosszúak. Az ABC szabályos háromszög tükörképe az $A'B'E$ háromszög, szintén szabályos. Az $AB'E$ háromszög egyenlő szárú, melyben az

$$AB'E\sphericalangle = AB'A'\sphericalangle - EB'A'\sphericalangle = 90° - 60\circ = 30°$$

így a háromszög alapszögei $75°$-osak, tehát

$$AEB'\sphericalangle = 75°.$$

Az E pontnál lévő szögek összege $360°$, így a kereset szög:

$$AEB\sphericalangle = 360° - AEB'\sphericalangle - BEA'\sphericalangle - B'EA'\sphericalangle = 360° - 2 \times 75° - 60° = 150°.$$

Zárszó

Kedves Olvasó! Ha egy másik „szép” megoldást talál, kérem küldje el nekem a szolda@fazekas.hu e-mail címre. Ezeket az újabb megoldásokat összegyűjtve időnként (terveim szerint) szintén megmutatnám.