Szoldatics József: Úton-módon

Egy feladat és ami róla az eszembe jutott...

Az 2019 évi Nemzetközi Magyar Matematikaverseny egyik, 9. osztályosoknak szóló feladatát Erdős Gábor (Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa) kollégám javasolta.

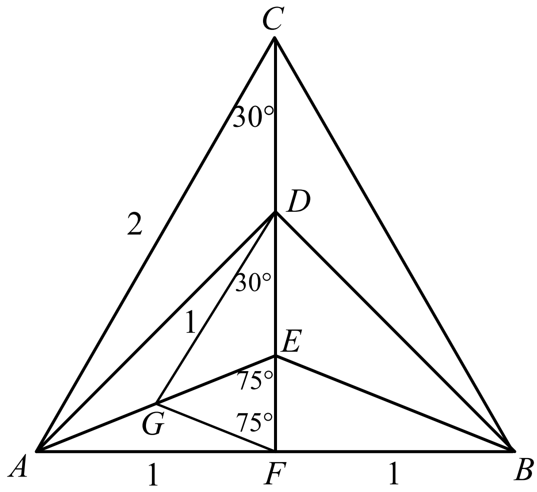
A feladatra matematika tanárok egy csoportja adott 20 elemi megoldást. A teljes anyag megtalálható a https://matek.fazekas.hu/ portálon a cikkek között, amit Erdős Gábor kollégám jegyez. Most ezek közül 7 megoldást mutatok. Mind a hét a maga nemében szép, vagy valami szép tulajdonságot használ. A megoldások közül az első három Erdős Gáboré; az utolsó négy megoldást én adtam.

A feladat

Az ABC szabályos háromszög AB oldalának felezőpontja F. A CF szakasz azon belső pontja a D pont, amelyre az ADB szög 90 fokos. A CF szakasz azon belső pontja az E pont, amelyre a CD és a DE szakaszok hossza egyenlő. Hány fokos az AEB szög?

1. Megoldás

Legyen a háromszög oldalának hossza 2 egység.



Legyen az AE szakasz felezőpontja G.
GD középvonal az AEC háromszögben, így

$$GD = \frac{AC}{2} = 1.$$

Az AFD háromszög egyenlő szárú és derékszögű, így

$$AF = FD = 1.$$

Az FDG háromszög egyenlő szárú, mivel

$$GD = FD = 1$$

$$GDF\sphericalangle = ACF\sphericalangle = 30^\circ,$$

hiszen egyállású szögek, ezért

$$GFD\sphericalangle = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

A Thalész-tétel megfordítása miatt az AFE háromszög köré írt kör középpontja G, így az EGF háromszög is egyenlő szárú, azaz

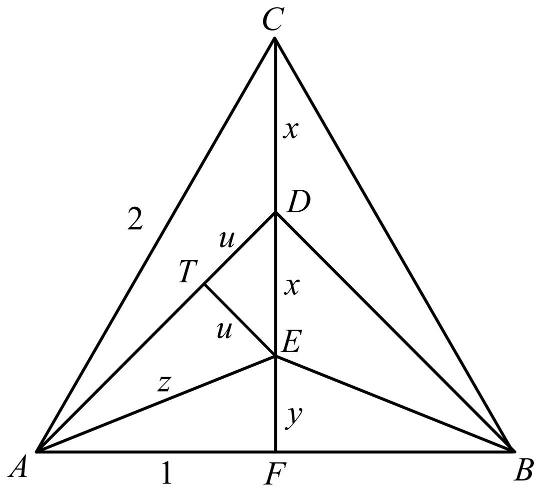
$$AEF\sphericalangle = GFD\sphericalangle = 75^\circ.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150^\circ.$$

2. Megoldás

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF = 2x + y = \sqrt{3}.$$

az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF = x + y = 1,$$

ezért

$$CD = DE = x = \sqrt{3} - 1,$$

és

$$EF = y = \sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

az AFE háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$AE = z = \sqrt{1 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

legyen az E-ből az AD-re bocsátott merőleges talppontja T.
Az ETD háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$2u^2 = x^2 = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 = 4 - 2\sqrt{3},$$

vagyis

$$ET = TD = u = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

De akkor az AET derékszögű háromszögben

$$AE = 2 \cdot ET,$$

ez tehát egy félszabályos háromszög, amiből következik, hogy

$$DAE\sphericalangle = 30^\circ.$$

Ekkor viszont

$$EAF\sphericalangle = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ,$$

így

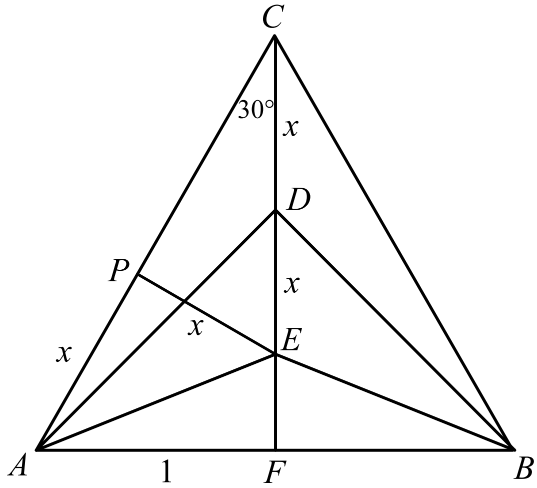
$$AEF\sphericalangle = 75^\circ.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150^\circ.$$

3. Megoldás

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF = 2x + y = \sqrt{3}.$$

Az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF = x + y = 1,$$

$$CD = DE = x = \sqrt{3} - 1.$$

Legyen E-ből az AC-re bocsátott merőleges talppontja P. Ekkor CPE félszabályos háromszög, így

$$PE = \frac{CE}{2} = x = \sqrt{3} - 1,$$

$$CP = \sqrt{3}\left(\sqrt{3} - 1\right) = 3 - \sqrt{3},$$

$$AP = 2 - \left(3 - \sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - 1 = x.$$

Azt kaptuk, hogy az APE derékszögű háromszögben

$$AP = EP = x = \sqrt{3} - 1,$$

tehát ez a háromszög egyenlő szárú is, ezért alapon fekvő szöge

$$PAE\sphericalangle = 45^\circ.$$

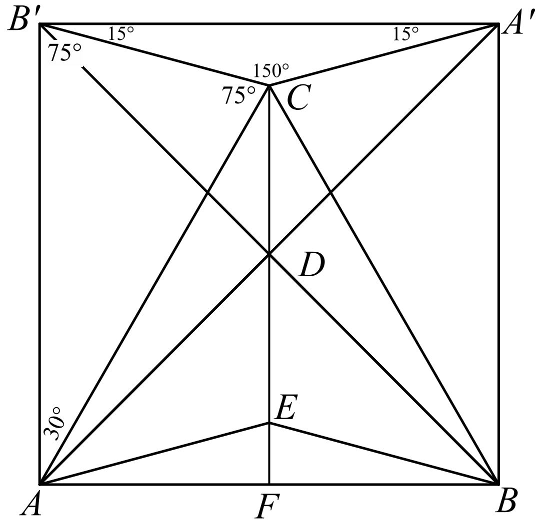
Az AEC háromszög E csúcsnál lévő külső szöge ezért

$$AEF\sphericalangle = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150^\circ.$$

4. Megoldás



Tükrözzük az ABE háromszöget a D pontra. Ekkor az E tükörképe C.
Az így kapott $ABA'B'$négyszög egy négyzet, hiszen átlói merőlegesek és egyenlő hosszúak. A négyzet belsejében pedig az ABC szabályos háromszög - ismert feladathoz jutottunk!

$$CAB'\sphericalangle = 90° - 60° = 30°,$$

továbbá az ACB' háromszög egyenlő szárú, így

$$AB'C\sphericalangle = \frac{180° - 30°}{2} = 75°.$$

de akkor

$$CB'A'\sphericalangle = 90° - 75° = 15°.$$

Szimmetria-okokból a $B'CA'$ háromszög egyenlő szárú, így

$$CA'B'\sphericalangle = 15°,$$

ezért

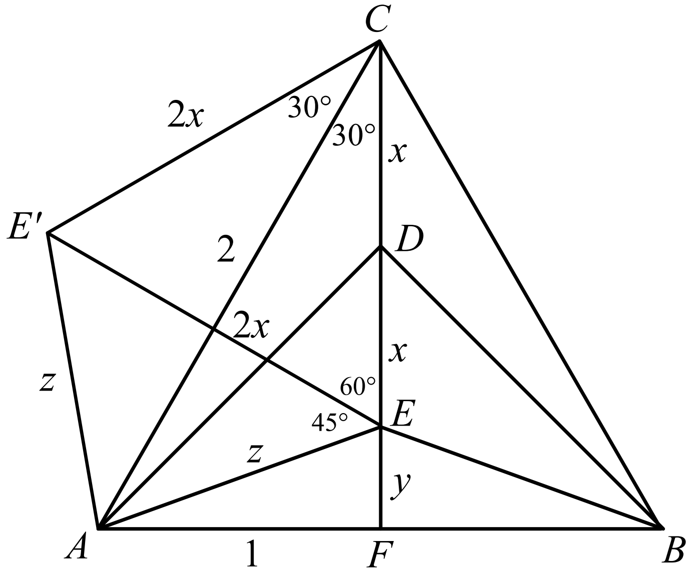
$$B'CA'\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 15° = 150°.$$

A keresett szög ennek a szögnek a tükörképe a D pontra nézve, így

$$AEB\sphericalangle = 150°.$$

5. Megoldás

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF = 2x + y = \sqrt{3}.$$

az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF = x + y = 1,$$

$$CD = DE = x = \sqrt{3} - 1,$$

$$EF = y = \sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

az AFE háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$AE = z = \sqrt{1 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{2}\sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

Legyen az E pont tükörképe az AC oldalra nézve E'.
Az ECE' háromszög szabályos,

$$EE' = 2x = 2\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

Az AEE' háromszögben

$$AE^2 + \left(AE'\right)^2 = 2z^2 = 4\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 = \left(2\left(\sqrt{3} - 1\right)\right)^2 = \left(EE'\right)^2,$$

ezért ez a háromszög a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt derékszögű. Mivel egyenlő szárú is, ezért

$$AEE'\sphericalangle = 45°.$$

Mivel az

$$AEC\sphericalangle = 60° + 45° = 105°,$$

ezért az

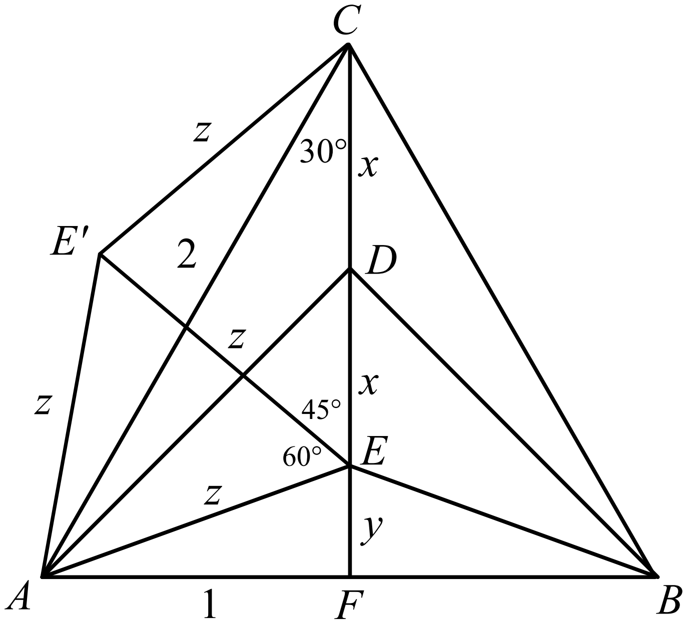
$$AEF\sphericalangle = 180° - 105° = 75°.$$

A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150°.$$

6. Megoldás

Legyen a háromszög oldala 2 egység. Használjuk az ábra jelöléseit.



Az AFC háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$CF = 2x + y = \sqrt{3}.$$

az AFD háromszög egyenlő szárú, így

$$DF = x + y = 1,$$

ezért

$$CD = DE = x = \sqrt{3} - 1,$$

$$EF = y = \sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

z AFE háromszögben a Pitagorasz-tétel miatt

$$AE = z = \sqrt{1 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{2}\sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

forgassuk el az ABE háromszöget 60 fokkal az A pont körül.
Legyen az E pont elforgatottja E'. Az AEE' háromszög szabályos,

$$EE' = z = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

A $CE'E$ háromszögben

$$\left(CE'\right)^2 + \left(AE'\right)^2 = 2z^2 = 4\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 = \left(2\left(\sqrt{3} - 1\right)\right)^2 = (2x)^2 = CE^2,$$

ezért ez a háromszög a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt derékszögű. Mivel ez a háromszög egyenlő szárú is, ezért

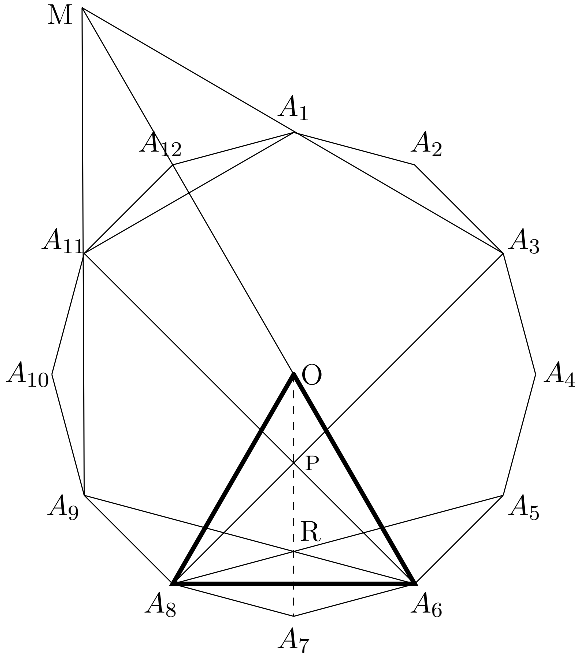
$$E'EC\sphericalangle = 45°.$$

Mivel az $AEC\sphericalangle = 60° + 45° = 105°$, ezért az $AEF\sphericalangle = 180° - 105° = 75°$. A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = 2 \cdot AEF\sphericalangle = 150°.$$

7. Megoldás

Tekintsük az $A_1A_2...A_{12}$ szabályos sokszöget, amelynek középpontja O pont.



Az $A_{11}A_6$ szakasz O körüli 90 fokos elforgatottja az A_8A_3 szakasz, így ez a két szakasz merőleges. Mivel az említett két szakasz egymás tükörképe az OA_7 egyenesre, így P metszéspontjuk illeszkedik a tükörtengelyre, tehát

$$A_8PA_6\sphericalangle = 90°.$$

Hasonlóan az A_9A_6 szakasz O körüli 30 fokos elforgatottja az A_8A_5 szakasz, így ennek a két szakasznak a hajlásszöge 30°. Mivel az említett két szakasz egymás tükörképe az OA_7 egyenesre, így R metszéspontjuk illeszkedik a tükörtengelyre, tehát $A_5RA_6\sphericalangle = 30°$, azaz

$$A_8RA_6\sphericalangle = 150°.$$

Mivel $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$ egy szabályos hatszög, ezért minden oldala egyenlő a köré írt kör sugarával (r), továbbá belső szögei 120 fokosak, tehát az $A_{11}A_1M$ háromszög szabályos, ezért

$$MA_{11} = r.$$

Az $OA_{11}A_9A_7$ négyszög rombusz, mivel minden oldala r hosszúságú, ezért szemközti oldalai, A_9A_{11} és A_7O párhuzamosak. Ez viszont azt jelenti, hogy egy A_6 középpontú kicsinyítéssel az MA_{11} szakasz képe lehet az OP szakasz, akkor a vele egyenlő hosszú A_9A_{11} szakasz képe ugyanezen kicsinyítés során az RP szakasz, így

$$OP = RP.$$

Mivel $A_8OA_6\sphericalangle = 60°$, így megjelent az ábrán a feladatban szereplő valamennyi pont és vonal: legyen $A_8 = A$, $A_6 = B$, $O = C$, $P = D$, $R = E$.
A kérdezett szög tehát:

$$AEB\sphericalangle = A_8RA_6\sphericalangle = 150°.$$

Megjegyzés: Természetesen a megoldás során tett állítások kerületi és középponti szögek tételére való hivatkozással is indokolhatók.

Zárszó

Kedves Olvasó! Ha egy másik „szép” megoldást talál, kérem küldje el nekem a szolda@fazekas.hu e-mail címre. Ezeket az újabb megoldásokat összegyűjtve időnként (terveim szerint) szintén megmutatnám.