Szoldatics József: Úton-módon

Egy feladat és ami róla az eszembe jutott...

Az idei Győr-Moson-Sopron Megyei Matematikaverseny egyik feladatát Árki Tamás (Révai Miklós Gimnázium és Kollégium, Győr) kollégám javasolta. A feladat a $100° - 40° - 40°$ háromszögről szólt. $100° - 40° = 60°$. Elgondolkodtam. Biztos lesz itt szép megoldás!

A következőkben 6 megoldást mutatok. Mind a hat a maga nemében szép, vagy valami szép tulajdonságot használ.

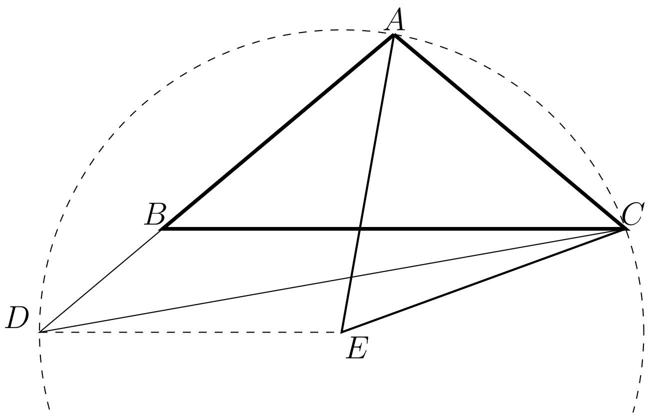
A feladat

Az ABC háromszögben $AB = AC$ és $CAB\sphericalangle = 100°$. Az AB oldal B-n túli meghosszabbításán vegyük fel a D pontot úgy, hogy $AD = BC$ teljesüljön. Számítsuk ki az $ADC\sphericalangle$ nagyságát.

1. megoldás

Használjuk ki, hogy a feladatban szereplő szögekre $100° - 40° = 60°$.

Rajzoljuk az AC oldalra az AEC szabályos háromszöget az ábra szerint. Kössük össze a D és E pontokat



$ADE\triangle \cong BCA\triangle$, mivel

$$DA = BC \text{ és } AB = AE$$

valamint

$$DAE\sphericalangle = ABC\sphericalangle = 40°$$

Ezért igaz, hogy

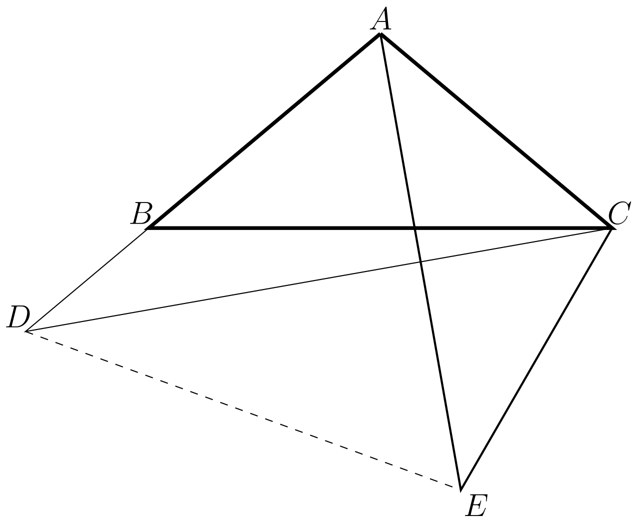
$$DE = AE = CE$$

azaz az A, C és D pontokon átmenő körnek E a középpontja. Mivel az AC szakasz E-ből 60°alatt látszik, a D kerületi pontból 30° alatt. Tehát a keresett szög 30°-os.

2. megoldás

Most is kihasználjuk, hogy a feladatban szereplő szögekre $100° - 40° = 60°$, de máshol keressük ezt a szöget.

Rajzoljuk meg a feladatban szereplő ABC háromszöggel egybevágó háromszöget az AC oldalra úgy, hogy C-nél legyen a $100°$-os szög. Kapjuk az AEC háromszöget.
Kössük össze a D és E pontokat az ábra szerint.



A szerkesztés miatt igazak a

$$AB = AC = CE$$

és

$$AD = AE = BC$$

valamint

$$DAE\sphericalangle = DAC\sphericalangle - EAC\sphericalangle = 100° - 40° = 60°$$

összefüggések, tehát $DAE\triangle$ szabályos, így a

$$AD = DE$$

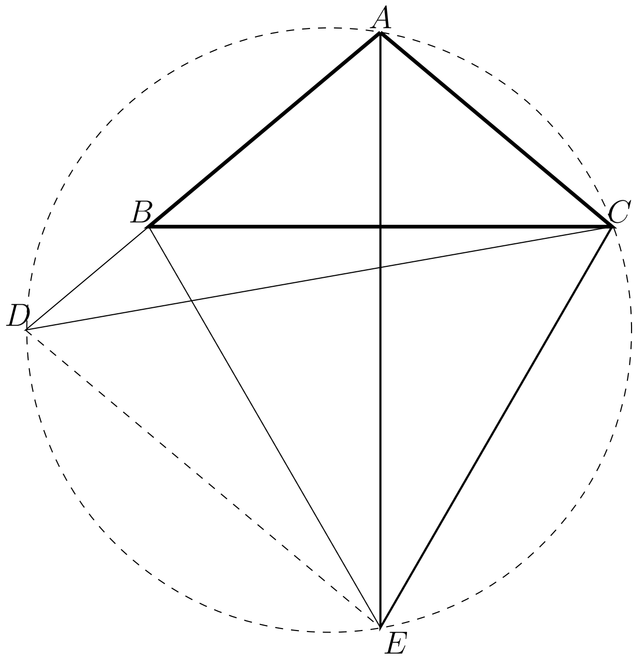
is teljesül. Az $ADEC$ négyszög tehát deltoid, ($AC = CE$ és $AD = DE$), aminek szimmetria átlója a DC szakasz, tehát felezi az ADE szöget.
Tehát a keresett szög

$$ADC\sphericalangle = \frac{ADE\sphericalangle}{2} = 30°$$

3. megoldás

Ismét a $100° - 40° = 60°$ összefüggést használjuk ki, de egy újabb helyen keressük a szögek különbségét.

Rajzoljunk szabályos háromszöget a BC oldalra az ábra szerint. Kapjuk a BCE háromszöget. Kössük össze az A, D és E pontokat

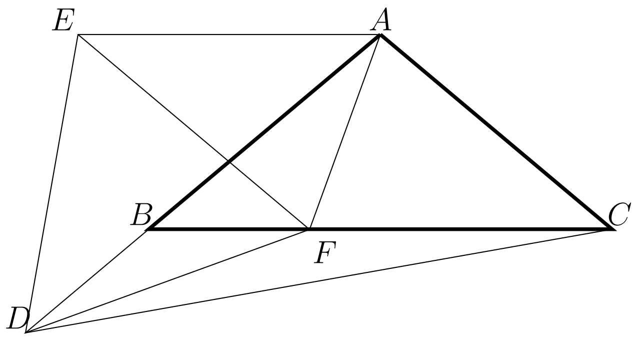


Mivel
$$AB = AC \text{ és } EB = EC$$
ezért a $BECA$ négyszög deltoid, aminek szimmetria átlója az AE szakasz, így felezi a $BEC\sphericalangle$-et, tehát
$$AEC\sphericalangle = \frac{BEC\sphericalangle}{2} = 30^\circ$$
Az $ADEC$ négyszög szimmetrikus trapéz, mivel
$$DAC\sphericalangle = ECA\sphericalangle = 100^\circ \text{ és } DA = EC$$
Ekkor ez a négyszög húrnégyszög.
Az AC szakasz ebben a körben az E pontból 30° alatt látszik, akkor a D pontból is, tehát a keresett szög
$$ADC\sphericalangle = 30^\circ$$

4. megoldás

Most keressük a szabályos háromszöget meglepő helyen.

Rajzoljuk az AD oldalra az eredetihez hasonló AED háromszöget az ábra szerint és legyen F olyan pont a BC oldalon, melyre $CA = CF$. Kössük össze az A, D, E és F pontokat



Az F pont megadása miatt $AFC\triangle$ egyenlő szárú, tehát

$$FAC\sphericalangle = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$

$$FAE\sphericalangle = 40^\circ + (100^\circ - 70^\circ) = 70^\circ$$

$EA = AC$, mivel így szerkesztettük.
Így $AFC\triangle \cong AEF\triangle$, ezért

$$EF = EA = ED$$

$$DEF\sphericalangle = 100^\circ - FEA\sphericalangle = 60^\circ$$

Tehát $DEF\triangle$ szabályos

$$DF = DE = AC = CF$$

$DFB\triangle$ és $DFC\triangle$ egyenlő szárú,

$$BDF\sphericalangle = 20^\circ \text{ és } FDC\sphericalangle = 10^\circ$$

$$ADC\sphericalangle = BDC\sphericalangle = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ$$

5. megoldás

Most nézzünk egy teljesen más megoldást, ami egy kis trigonometriával van fűszerezve. A megoldás során felhasználjuk a

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

azonosságot.

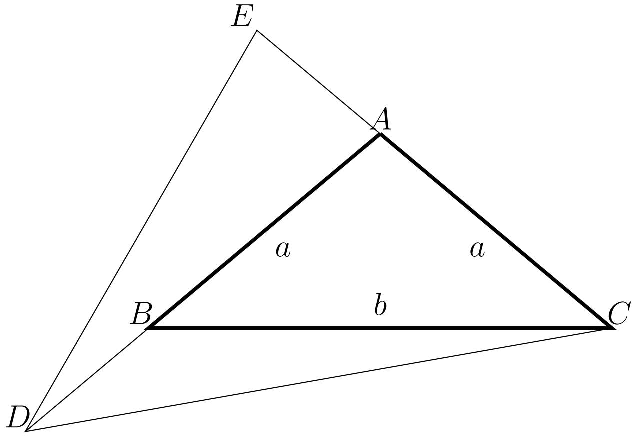
Rajzoljuk meg az AC oldal meghosszabbításán azt az E pontot, melyre

$$DEA\sphericalangle = DAE\sphericalangle = 80^\circ$$

Kössük össze az A, D és E pontokat.
Legyenek a szárak hosszai $AB = AC = a$. Ekkor

$$b = 2 \cdot \sin 50^\circ$$

mivel az A-ból BC-re bocsátott merőleges két egybevágó derékszögű háromszögre bontja az eredeti háromszöget.



$$DE = DA = b$$

a szerkesztés miatt,

$$EDA\sphericalangle = 20^\circ$$

és ugyanúgy, mint az előbb

$$EA = 4 \cdot \sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ$$

Mivel

$$2 \cdot \sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ = 2 \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ = \cos 120^\circ + \cos 40^\circ = \sin 50^\circ - \frac{1}{2}$$

ezért

$$EA = 4 \cdot \sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ = 2 \cdot \sin 50^\circ - 1 = b - a$$

$$EC = b = AD = ED$$

azaz $DCE\triangle$ egyenlő szárú, és

$$EDC\sphericalangle = ECD\sphericalangle = 50^\circ$$

A keresett szög:

$$ADC\sphericalangle = EDC\sphericalangle - EDA\sphericalangle = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ$$

6. megoldás

És végül jöjjön egy kis vegytiszta trigonometria. A megoldás során felhasználjuk a

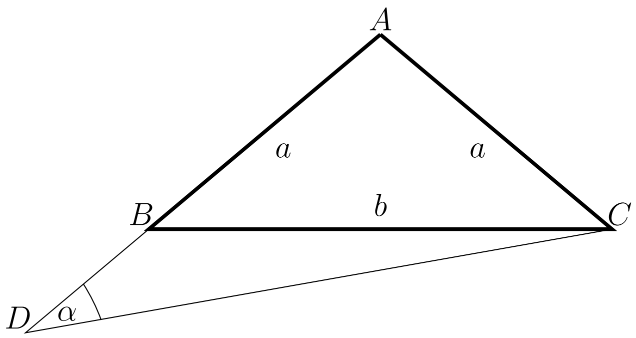
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

azonosságot.

Legyenek a szárak hossza $AN = AC = a$. Ekkor

$$b = 2 \cdot \sin 50^\circ$$

mivel az A-ból BC-re bocsátott merőleges két egybevágó derékszögű háromszögre bontja az eredeti háromszöget.



Szinusz tételt felírva az $ADC\triangle$-ben (α-val jelölve a keresett szöget)

$$
\begin{aligned}
\frac{2\cdot\sin 50^\circ}{1} &= \frac{\sin(180^\circ-100^\circ-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin(80^\circ-\alpha)}{\sin\alpha}\\
2\cdot\sin 50^\circ &= \frac{\sin 80^\circ\cdot\cos\alpha-\cos 80^\circ\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha}\\
2\cdot\sin 50^\circ &= \sin 80^\circ\cdot\operatorname{ctg}\alpha-\cos 80^\circ\\
2\cdot\sin 50^\circ+\cos 80^\circ &= \sin 80^\circ\cdot\operatorname{ctg}\alpha\\
\operatorname{ctg}\alpha &= \frac{2\cdot\sin 50^\circ+\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ}
\end{aligned}
$$

A jobb oldalt alakítva

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ctg}\alpha &= \frac{2\cdot\sin 50^\circ+\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{2\cdot\cos 40^\circ+\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\cos 40^\circ+\cos 40^\circ+\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ} =\\
&= \frac{\cos 40^\circ+2\cdot\cos 60^\circ\cdot\cos 20^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\cos 40^\circ+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 20^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\cos 40^\circ+\cos 20^\circ}{\sin 80^\circ} =\\
&= \frac{2\cdot\cos 30^\circ\cdot\cos 10^\circ}{\sin 80^\circ} == \frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 10^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\sqrt{3}\cdot\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ctg}\alpha &= \sqrt{3}\\
\alpha = ADC\sphericalangle &= 30^\circ
\end{aligned}
$$

Zárszó

Kedves Olvasó! Ha egy másik „szép” megoldást talál, kérem küldje el nekem a szolda@fazekas.hu e-mail címre. Ezeket az újabb megoldásokat összegyűjtve időnként (terveim szerint) szintén megmutatnám.