

# *Egészrész, törtrész egyenletek, egyenletrendszerek*

## Azonosságok

A definícióból könnyen kiolvashatók a következő azonosságok, melyek minden valós számra fennállnak. Bizonyításuk a definícióból következik.

1.  $[[x]] = [x]$ ; ahol  $x \in \mathbb{R}$
2.  $\{\{x\}\} = \{x\}$ ; ahol  $x \in \mathbb{R}$
3.  $[x + n] = [x] + n$ ; ahol  $n \in \mathbb{Z}$  tetszőleges egész szám.
4.  $[n] = n$ , ahol  $n \in \mathbb{Z}$  tetszőleges egész szám.
5.  $\{x + n\} = \{x\}$ ; ahol  $n \in \mathbb{Z}$  tetszőleges egész szám.
6.  $\{n\} = 0$ ; ahol  $n \in \mathbb{Z}$  tetszőleges egész szám.
7.  $[\{x\}] = 0$ ; ahol  $x \in \mathbb{R}$
8.  $\{[x]\} = 0$ ; ahol  $x \in \mathbb{R}$
9.  $[x - [x]] = 0$ ; ahol  $x \in \mathbb{R}$
10.  $[[x] - x] = \begin{cases} 0; & x \in \mathbb{Z} \\ -1; & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
11.  $\{x - \{x\}\} = 0$ ; ahol  $x \in \mathbb{R}$
12.  $\{\{x\} - x\} = 0$ ; ahol  $x \in \mathbb{R}$

## Feladatok

### Azonosságok

1. Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán:

$$[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$$

2. Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán:

$$[x - y] \leq [x] - [y]$$

3. Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán:

$$[x] + [y] + [x + y] \leq [2x + 2y]$$

4. Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán, ahol  $n \in \mathbb{N}^+$ .

$$\left[ \frac{[x]}{n} \right] = \left[ \frac{x}{n} \right]$$

5. Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán:

$$n [x] \leq [nx]; \quad n \in \mathbb{N}^+$$

6. Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán.

$$[x] + \left[ x + \frac{1}{2} \right] = [2x]$$

7. Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán.

$$[x] + \left[ x + \frac{1}{3} \right] + \left[ x + \frac{2}{3} \right] = [3x]$$

8. Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán.

$$[x] + \left[ x + \frac{1}{4} \right] + \left[ x + \frac{2}{4} \right] + \left[ x + \frac{3}{4} \right] = [4x]$$

## Lineáris egyenletek

9. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[2x + 1] = 5$$

10. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\{2x + 1\} = 0$$

11. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[2x] = x$$

12. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[2x] = x - 1$$

13. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[2x] = [x]$$

14. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[2x] = [x] - 1$$

15. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$2[x] = [2x]$$

16. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[x] + x = [2x]$$

17. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[x + 3] = 3 + [x]$$

18. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[9x] = 9$$

19. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$2[x] = 5\{x + 2\}$$

20. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$2\{x\} = 5[x + 2]$$

21. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[2x] = 2[x] - 1$$

22. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[2x] = 3x - 1$$

23. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left[x - \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$$

24. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left[ x - \frac{1}{2} \right] + \left[ x + \frac{1}{2} \right] = [3x]$$

25. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[x] + [2x] + [3x] = [6x]$$

26. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left[ \frac{[x] + [2x] + [3x]}{6} \right] = x$$

27. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$x - 1 = \left[ \frac{x}{2} \right] + \left[ \frac{x}{3} \right] + \left[ \frac{x}{6} \right]$$

28. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$x - 1 = \left[ \frac{x}{2} \right] + \left[ \frac{x}{3} \right] + \left[ \frac{x}{4} \right]$$

29. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left[ \frac{6x + 5}{8} \right] = \frac{15x - 7}{5}$$

30. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left[ \frac{5x + 3}{6} \right] = \frac{6x - 1}{5}$$

31. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[x - 1] = \left[ \frac{x + 2}{2} \right]$$

32. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[x - 2] = \left[ \frac{x + 2}{3} \right]$$

## Nem lineáris egyenletek

33. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$2^{[x]} = 2x + 1$$

34. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[2^x] = 2x + 1$$

35. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$3^{[x]} = 3x + 1$$

36. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[3^x] = 3x + 1$$

37. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$8 \left[ \frac{4x + 1}{5} \right] = 2^{7x-1}$$

38. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$8 \left[ \frac{4x + 1}{3} \right] = 2^{2x-1}$$

39. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[x^3] + [x^2] + [x] = \{x\} - 1$$

40. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[x^2] = [x]^2$$

41. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[x] = 1 + \{x^2 - 1\}$$

42. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$x^3 - [x] = 3$$

43. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$2^x - 2 = [[x] - x]$$

44. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$x^2 - [x] = 6 \{x\}$$

45. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[x^2] - x = 6 \{x\}$$

46. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[x^4] - 2[x^2] = \{x\} - 1$$

47. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left[ \frac{1}{\{x\}} \right] = [x]$$

48. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left\{ \frac{1}{[x]} \right\} = \{x\}$$

## Egyenletrendszerek

49. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + \{y\} = 6 \end{cases}$$

50. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ [x] + \{y\} = 7 \end{cases}$$

## Variációk egy feladatra

51. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ [xy] = 6 \end{cases}$$

52. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x [y] = 6 \end{cases}$$

53. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} x + [y] = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

54. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} [x + y] = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

55. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} [x + y] = 5 \\ [xy] = 6 \end{cases}$$

56. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} [x + y] = 5 \\ x [y] = 6 \end{cases}$$

57. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} x + [y] = 5 \\ [xy] = 6 \end{cases}$$

58. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} x + \{y\} = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

59. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x \{y\} = 6 \end{cases}$$

60. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} [x] + \{y\} = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

61. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} [x] + \{y\} = 5 \\ \{x\} [y] = 6 \end{cases}$$

62. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} [x + \{y\}] = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

## Vegyes feladatok

63. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$|x| - 1 = \{x\}$$

64. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[x] + |x| = \{x\}$$

65. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} x + 2[y] = 5 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$$

66. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} [x + 2y] = 4 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$

67. Határozza meg azokat az  $x$ ,  $y$ ,  $z$  valós számokat, amelyek megoldásai az alábbi egyenletrendszernek:

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 3,4 \\ [x] + \{y\} + z = 4,5 \\ \{x\} + y + [z] = 5,3 \end{cases}$$

Arany Dániel 2013/2014, Kezdők Döntő forduló 1. feladat

