Fazekas Matematika Minikurzus

Egészrész, törtrész egyenletek, egyenletrendszerek

Szoldatics József

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimázium

2025. január 14 – 15.

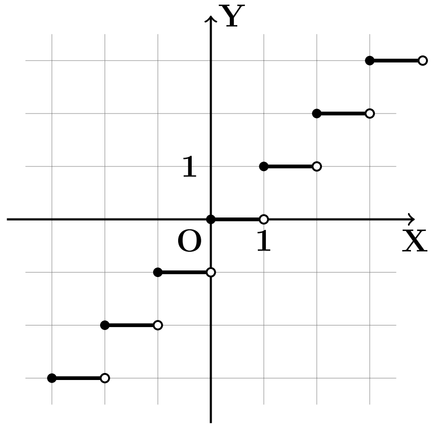
Tartalomjegyzék

1. Elméleti áttekintés

1.1. Bevezetés

Napjainkban ismét megjelennek a versenyeken az egészrész és törtrész kifejezéseket tartalmazó egyenletek. Ezek megoldásában, kezelésében szeretnék segíteni.

1.2. Az egészrész függvény



Az egészrész $[x]$ minden valós számhoz a nála nem nagyobb egészek közül a legnagyobbat rendeli, tehát ha $n \le x < n+1$ $(n \in \mathbb{Z})$, akkor $[x] = n$ és

$$x - 1 < [x] \le x < [x] + 1$$

A függvény a valós számok halmazát az egész számokra képezi le.

A függvény segítségével viszonylag egyszerű példáját mutathatjuk a nem mindenütt folytonos, monoton függvényeknek. A függvénynek minden egész helyen szakadása van, az ábrán minden egyes egységnyi szakasz bal oldali végpontja hozzá tartozik a grafikonhoz, a jobb oldali nem, tehát ott „lyukas”.

Ha a függvényt leszűkítjük az egész számok halmazára, az ehhez a halmazhoz tartozó identitás függvényt kapjuk, hiszen minden egész számnak az egészrésze önmaga.

1.3. A törtrész függvény

A törtrész $\{x\}$ függvényt a következő hozzárendelési szabállyal definiáljuk:

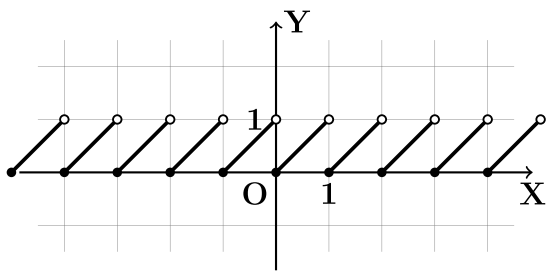
$$\{x\} = x - [x]$$

vagy ezt átrendezve

$$x = \{x\} + [x]$$

A függvény a valós számok halmazát a balról zárt, jobbról nyílt intervallumra képezi le. Ha a függvényt leszűkítjük az egész számok halmazára, ezen a halmazon az azonosan 0 függvényt kapjuk.

Ezzel a függvénnyel a gyerekek egyszerű példán megismerhetik a függvények periodicitását, tehát nemcsak a trigonometrikus függvények alkalmasak e tulajdonság bemutatására!



1.4. Azonosságok

A definícióból könnyen kiolvashatók a következő azonosságok, melyek minden valós számra fennállnak. Bizonyításuk a definícióból következik.

1. $[[x]] = [x]$; ahol $x \in \mathbb{R}$
2. $\{\{x\}\} = \{x\}$; ahol $x \in \mathbb{R}$
3. $[x + n] = [x] + n$; ahol $n \in \mathbb{Z}$ tetszőleges egész szám.
4. $[n] = n$, ahol $n \in \mathbb{Z}$ tetszőleges egész szám.
5. $\{x + n\} = \{x\}$; ahol $n \in Z$ tetszőleges egész szám.
6. $\{n\} = 0$; ahol $n \in Z$ tetszőleges egész szám.
7. $[\{x\}] = 0$; ahol $x \in \mathbb{R}$
8. $\{[x]\} = 0$; ahol $x \in \mathbb{R}$
9. $[x - [x]] = 0$; ahol $x \in \mathbb{R}$
10. $[[x] - x] = \begin{cases} 0; & x \in \mathbb{Z} \\ -1; & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
11. $\{x - \{x\}\} = 0$; ahol $x \in \mathbb{R}$
12. $\{\{x\} - x\} = 0$; ahol $x \in \mathbb{R}$

Hasznosak még a következő azonosságok is, melyek nem annyira nyilvánvalók, ezért a feladatok között kaptak helyet:

13. $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$
14. $[x - y] \leq [x] - [y]$
15. $[x] + [y] + [x + y] \leq [2x + 2y]$
16. $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]; \qquad n \in \mathbb{N}^+$
17. $n\,[x] \leq [nx]\,; \qquad n \in \mathbb{N}^+$
18. $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$
19. $[x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = [3x]$

1.5. Megoldási módszerek

Az egyenletek megoldása során többféle módszer közül választhatunk. Talán szerencsésebb lenne a módszer helyett megoldási ötletet írni. Általában egy feladat sokféle módon megoldható, itt csak ízelítőt adnék néhány módszerről, eljárásról.

A módszer végén szerepel külön–külön a bal és jobb oldal, mint függvény és egyben is.

1.5.1. Definíció használata

Használjuk a definíciót, a keresett kifejezésünkre kaphatunk 2 egyenlőtlenséget is.

Feladat

Oldjuk meg a $\left[\frac{3x-1}{2}\right] = \frac{2x+1}{3}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás

Az egyenlet bal oldalán egész szám áll, tehát a jobb oldal is egész szám, legyen ez $n \in \mathbb{Z}$. Kapjuk, hogy

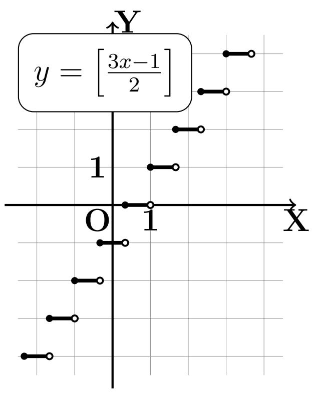
$$\begin{aligned} \left[\frac{3x-1}{2}\right] &= n \\ n \leq \frac{3x-1}{2} &< n+1 \\ \frac{2n+1}{3} \leq x &< \frac{2n+3}{3} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \frac{2x+1}{3} &= n \\ x &= \frac{3n-1}{2} \\ x &= \frac{3n-1}{2} \end{aligned}$$

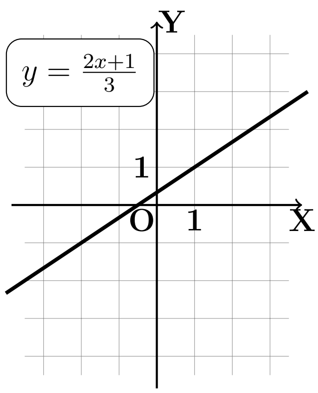
A kapottakat felhasználva

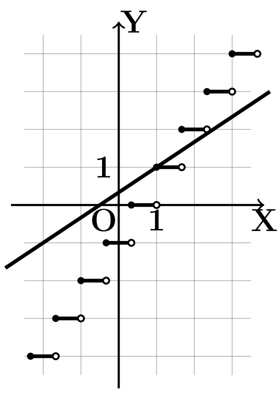
$$\begin{array}{rcl} \frac{2n+1}{3} \leq & x & < \frac{2n+3}{3} \\ \frac{2n+1}{3} \leq & \frac{3n-1}{2} & < \frac{2n+3}{3} \\ 4n+2 \leq & 9n-3 & < 4n+6 \\ 2 \leq & 5n-3 & < 6 \\ 5 \leq & 5n & < 9 \\ 1 \leq & n & < \frac{9}{5} \end{array}$$

A kapott intervallumban csak egy egész szám van, tehát $n = 1$ és ebből $x = 1$.

Az ellenőrzés a kapott megoldást jónak találja.







1.5.2. Részekre (intervallumokra) bontás

A vizsgált intervallumot bontsuk részekre. Az ok, hogy ezáltal kézben lehet tartani, hogy mikor lép át egy újabb egész értéket az egészrész függvény.

Feladat

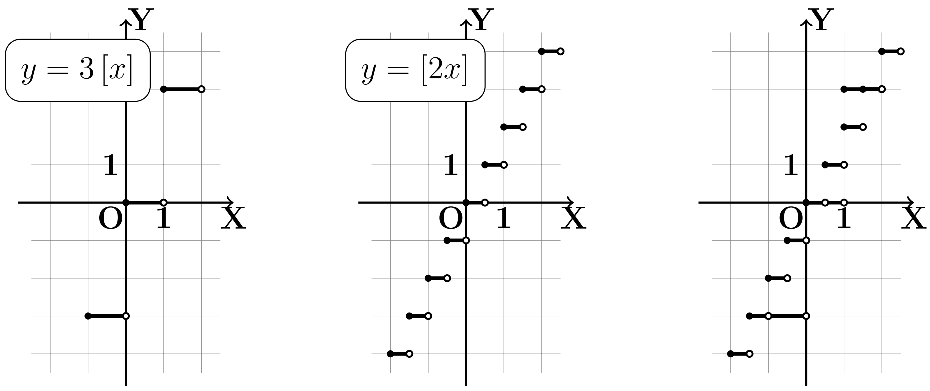
Oldjuk meg a $3\,[x] = [2x]$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás

Mivel $[2x]$ értéke akkor változik, ha x törtrésze vagy 0 vagy 0,5, ezért a vizsgálatot bontsuk fel e szerint.

Intervallum ($n \in \mathbb{Z}$)	$[2x]$	Egyenlet	Megoldás	
$n \le x < n + \frac{1}{2}$	$2n$	$3 \cdot n = 2n$	$n = 0;$	$0 \le x < \frac{1}{2}$
$n + \frac{1}{2} \le x < n + 1$	$2n + 1$	$3 \cdot n = 2n + 1$	$n = 1;$	$1 + \frac{1}{2} \le x < 2$

Összesítve az egyenlet megoldását: $0 \le x < \frac{1}{2}$ vagy $\frac{3}{2} \le x < 2$



1.5.3. Oszthatóság „belekeverése" a feladatba

Feladat

Oldjuk meg a $[x-1] = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{4}\right]$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás

Keressük az ismeretlenünket

$$x = [x] + \{x\} = 4a + b + \{x\}$$

alakban, ahol $a \in \mathbb{Z}$ és $b \in \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

I. eset Legyen $b = 0$; $x = 4a + \{x\}$ alakú, ekkor egyenletünk

$$[4a + \{x\} - 1] = \left[\frac{4a + \{x\}}{2}\right] + \left[\frac{4a + \{x\}}{4}\right]$$
$$4a - 1 + [\{x\}] = \left[2a + \frac{\{x\}}{2}\right] + \left[a + \frac{\{x\}}{4}\right]$$

$$
\begin{aligned}
4a-1 =& 2a+\left[\frac{\{x\}}{2}\right]+a+\left[\frac{\{x\}}{4}\right]\\
4a-1 =& 2a+a\\
a =& 1 \qquad \Rightarrow \qquad 4\le x<5
\end{aligned}
$$

II. eset Legyen $b=1$; $x=4a+1+\{x\}$ alakú, ekkor egyenletünk

$$
\begin{aligned}
[4a+1+\{x\}-1] =& \left[\frac{4a+1+\{x\}}{2}\right]+\left[\frac{4a+1+\{x\}}{4}\right]\\
4a+1-1+[\{x\}] =& \left[2a+\frac{1+\{x\}}{2}\right]+\left[a+\frac{1+\{x\}}{4}\right]\\
4a =& 2a+\left[\frac{1+\{x\}}{2}\right]+a+\left[\frac{1+\{x\}}{4}\right]\\
4a =& 2a+a\\
a =& 0 \qquad \Rightarrow \qquad 1\le x<2
\end{aligned}
$$

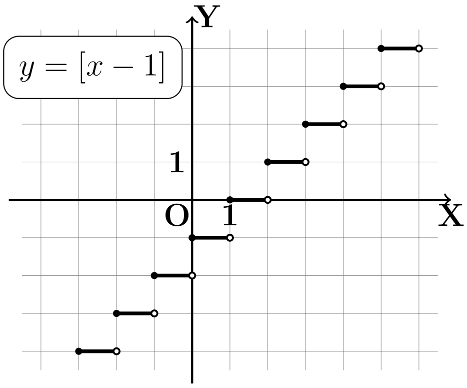
III. eset Legyen $b=2$; $x=4a+2+\{x\}$ alakú, ekkor egyenletünk

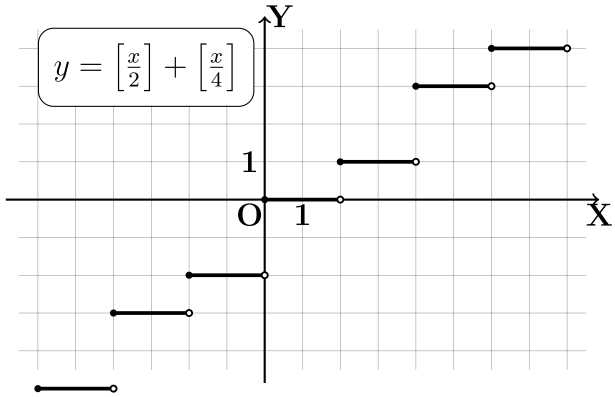
$$
\begin{aligned}
[4a+2+\{x\}-1] =& \left[\frac{4a+2+\{x\}}{2}\right]+\left[\frac{4a+2+\{x\}}{4}\right]\\
4a+2-1+[\{x\}] =& \left[2a+\frac{2+\{x\}}{2}\right]+\left[a+\frac{2+\{x\}}{4}\right]\\
4a+2-1 =& 2a+\left[\frac{2+\{x\}}{2}\right]+a+\left[\frac{2+\{x\}}{4}\right]\\
4a+1 =& 2a+1+a\\
a =& 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2\le x<3
\end{aligned}
$$

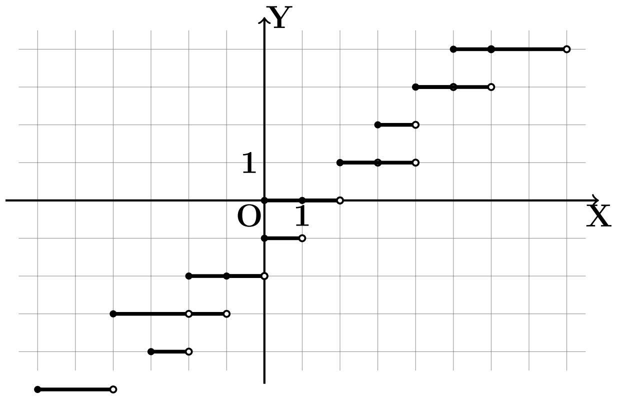
IV. eset Legyen $b=3$; $x=4a+3+\{x\}$ alakú, ekkor egyenletünk

$$
\begin{aligned}
[4a+3+\{x\}-1] =& \left[\frac{4a+3+\{x\}}{2}\right]+\left[\frac{4a+3+\{x\}}{4}\right]\\
4a+3-1+[\{x\}] =& \left[2a+\frac{3+\{x\}}{2}\right]+\left[a+\frac{3+\{x\}}{4}\right]\\
4a+2 =& 2a+\left[\frac{3+\{x\}}{2}\right]+a+\left[\frac{3+\{x\}}{4}\right]\\
4a+2 =& 2a+1+a\\
a =& -1 \qquad \Rightarrow \qquad -1\le x<0
\end{aligned}
$$

Összefoglalva a kapott intervallumokat: $-1\le x<0$ vagy $1\le x<3$ vagy $4\le x<5$.







1.5.4. Törtrész függvény „átírása"

Feladat

Adjuk meg a $\dfrac{1}{x} = \{x\}$ egyenlet azon megoldását, melyre $2024 \leq x \leq 2025$ intervallumba esik.

Megoldás

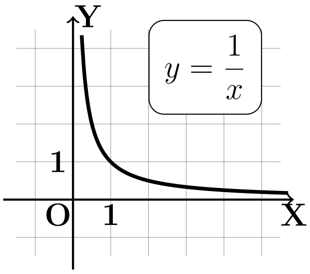
Az adott intervallumban a törtrész függvény az $y = x - 2024$ függvény leszükítése. Ezt használva az egyenlet megoldásához

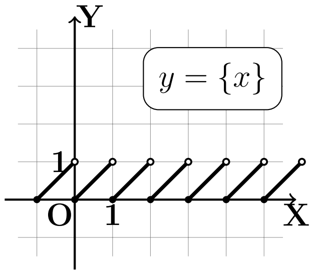
$$\frac{1}{x} = \{x\}$$
$$\frac{1}{x} = x - 2024$$
$$0 = x^2 - 2024x - 1$$
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2024^2 + 4}}{2}$$

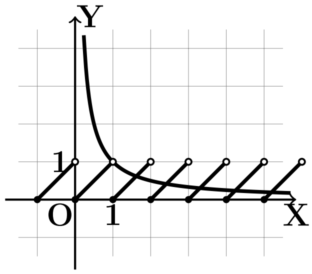
$$x_1 = \frac{2024 - \sqrt{4096580}}{2}; \qquad x_2 = \frac{2024 + \sqrt{4096580}}{2}$$

Mivel $x_1 < 0$, ezért a keresett gyök

$$x = \frac{2024 + \sqrt{4096580}}{2} = 2024 + \frac{4}{\sqrt{4096580} + 2024}$$







2. megoldás

A keresett megoldás egészrésze 2024. Ezt kihasználva

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \{x\} \\
\frac{1}{[x] + \{x\}} &= \{x\} \\
\frac{1}{2024 + \{x\}} &= \{x\} \\
0 &= \left(\{x\}\right)^2 + 2024\,\{x\} - 1
\end{aligned}$$

Ez az egyenlet $\{x\}$-re nézve másodfokú, melynek megoldása

$$x_{1,2} = \frac{-2024 \pm \sqrt{2024^2 + 4}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2024 - \sqrt{4096580}}{2} \qquad \text{vagy} \qquad x_2 = \frac{-2024 + \sqrt{4096580}}{2}$$

Mivel $x_1 < 0$, ezért a megoldás törtrésze

$$\{x\} = \frac{-2024 + \sqrt{4096580}}{2}$$

és a gyök

$$x = 2024 + \frac{-2024 + \sqrt{4096580}}{2} = \frac{2024 + \sqrt{4096580}}{2}$$

2. Feladatok

2.1. Azonosságok igazolása

1. Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán:

$$[x]+[y]\leq[x+y]\leq[x]+[y]+1$$

2. Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán:

$$[x-y]\leq[x]-[y]$$

3. Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán:

$$[x]+[y]+[x+y]\leq[2x+2y]$$

4. Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán, ahol $n\in\mathbb{N}^+$.

$$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$$

5. Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán:

$$n\,[x]\leq[nx]\,;\qquad n\in\mathbb{N}^+$$

6. Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán.

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$$

7. Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán.

$$[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]$$

8. Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán.

$$[x]+\left[x+\frac{1}{4}\right]+\left[x+\frac{2}{4}\right]+\left[x+\frac{3}{4}\right]=[4x]$$

2.2. Lineáris egyenletek

9. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[2x+1]=5$$

10. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\{2x+1\}=0$$

11. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[2x]=x$$

12. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[2x]=x-1$$

13. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[2x]=[x]$$

14. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[2x]=[x]-1$$

15. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$2\,[x]=[2x]$$

16. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[x]+x=[2x]$$

17. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[x+3]=3+[x]$$

18. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[9x]=9$$

19. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$2\,[x] = 5\,\{x+2\}$$

20. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$2\,\{x\} = 5\,[x+2]$$

21. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[2x] = 2\,[x] - 1$$

22. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[2x] = 3x - 1$$

23. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left[x - \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$$

24. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left[x - \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [3x]$$

25. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[x] + [2x] + [3x] = [6x]$$

26. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left[\frac{[x] + [2x] + [3x]}{6}\right] = x$$

27. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$x - 1 = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{6}\right]$$

28. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$x - 1 = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right]$$

29. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left[\frac{6x+5}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$$

30. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left[\frac{5x+3}{6}\right]=\frac{6x-1}{5}$$

31. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[x-1]=\left[\frac{x+2}{2}\right]$$

32. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[x-2]=\left[\frac{x+2}{3}\right]$$

2.3. Nem lineáris egyenletek

33. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$2^{[x]}=2x+1$$

34. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[2^x]=2x+1$$

35. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$3^{[x]}=3x+1$$

36. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[3^x]=3x+1$$

37. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$8^{\left[\frac{4x+1}{5}\right]}=2^{7x-1}$$

38. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$8^{\left[\frac{4x+1}{3}\right]} = 2^{2x-1}$$

39. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left[x^3\right] + \left[x^2\right] + [x] = \{x\} - 1$$

40. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left[x^2\right] = [x]^2$$

41. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[x] = 1 + \left\{x^2 - 1\right\}$$

42. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$x^3 - [x] = 3$$

43. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$2^x - 2 = [[x] - x]$$

44. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$x^2 - [x] = 6\{x\}$$

45. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left[x^2\right] - x = 6\{x\}$$

46. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left[x^4\right] - 2\left[x^2\right] = \{x\} - 1$$

47. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left[\frac{1}{\{x\}}\right] = [x]$$

48. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left\{\frac{1}{[x]}\right\} = \{x\}$$

2.4. Egyenletrendszerek

49. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + \{y\} = 6 \end{cases}$$

50. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ [x] + \{y\} = 7 \end{cases}$$

2.5. Variációk egy feladatra

51. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ [xy] = 6 \end{cases}$$

52. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x\,[y] = 6 \end{cases}$$

53. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} x + [y] = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

54. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} [x + y] = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

55. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} [x + y] = 5 \\ [xy] = 6 \end{cases}$$

56. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} [x + y] = 5 \\ x\,[y] = 6 \end{cases}$$

57. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} x + [y] = 5 \\ [xy] = 6 \end{cases}$$

58. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} x + \{y\} = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

59. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x\,\{y\} = 6 \end{cases}$$

60. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} [x] + \{y\} = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

61. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} [x] + \{y\} = 5 \\ \{x\}\,[y] = 6 \end{cases}$$

62. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} [x + \{y\}] = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

2.6. Vegyes feladatok

63. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$|x| - 1 = \{x\}$$

64. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$[x] + |x| = \{x\}$$

65. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} x + 2\,[y] = 5 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$$

66. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán

$$\begin{cases} [x + 2y] = 4 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$

67. Határozza meg azokat az x, y, z valós számokat, amelyek megoldásai az alábbi egyenletrendszernek:

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 3{,}4 \\ [x] + \{y\} + z = 4{,}5 \\ \{x\} + y + [z] = 5{,}3 \end{cases}$$

Arany Dániel 2013/2014, Kezdők Döntő forduló 1. feladat

3. Megoldások

A feladatok megoldása szerepel a következőkben. Nem csak az itt megadott módon oldhatók meg a feladatok, hanem más módszerrel is eredményt lehet elérni. Minden megoldás (majdnem minden) külön oldalon kezdődik, ha ki kell másolni, egyszerűbb legyen.

A megoldások végén több esetben szerepel külön–külön a bal és jobb oldal, mint függvény és egyben is.

3.1. Azonosságok igazolása

1. *Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán:*

$$[x] + [y] \le [x + y] \le [x] + [y] + 1$$

Megoldás

Használjuk a definíciót, azaz

$$x = [x] + \{x\}\,; \qquad y = [y] + \{y\}$$

Ekkor kapjuk, hogy

$$[x] + [y] \le x + y = [x] + [y] + \{x\} + \{y\} < [x] + [y] + 2$$
$$[x] + [y] \le x + y < [x] + [y] + 2$$

hiszen

$$0 \le \{x\} < 1 \qquad \text{és} \qquad 0 \le \{y\} < 1$$

Vegyük az egészrészét az egyenlőtlenségnek és használjuk az azonosságokat

$$\begin{aligned} [[x] + [y]] \le [x + y] \quad &< \quad [[x] + [y] + 2] \\ [x] + [y] \le [x + y] \quad &< \quad [x] + [y] + 2 \\ [x] + [y] \le [x + y] \quad &\le \quad [x] + [y] + 1 \end{aligned}$$

Tehát azonossággal van dolgunk.

Egyenlőség a bal oldalon, ha

$$\{x\} + \{y\} < 1$$

Egyenlőség a jobb oldalon, ha

$$1 \le \{x\} + \{y\}$$

2. *Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán:*

$$[x - y] \le [x] - [y]$$

Megoldás

Alkalmazzuk az 1. feldatban szereplő egyenlőtlenség bal oldalát y és $x - y$ számokra

$$[y] + [x - y] \le [x]$$

ezt átrendezve kajuk a bizonyítandó állítást

$$[x - y] \le [x] - [y]$$

Egyenlőség csak akkor, ha

$$\{x - y\} + \{y\} < 1$$

3. *Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán:*

$$[x]+[y]+[x+y]\le[2x+2y]$$

Megoldás

Alkalmazzuk az 1. feldatban szereplő egyenlőtlenség bal oldalát egymás után kétszer

$$[x]+[y]+[x+y]\le[x+y]+[x+y]\le[(x+y)+(x+y)]=[2x+2y]$$

Egyenlőség csak akkor, ha

$$\{x\}+\{y\}<1; \qquad \text{és} \qquad \{x+y\}<\frac{1}{2};$$

4. *Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán, ahol $n\in\mathbb{N}^+$.*

$$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$$

Megoldás

Írjuk fel most az n -nel való osztási maradék szerinti az ismeretlent

$$x=na+b+\{x\}$$

lakban, ahol $b\in\{0;\ 1;\ ...;\ (n-1)\}$ és $a\in Z$

Az egyenlet bal oldala:

$$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{[na+b+\{x\}]}{n}\right]=\left[\frac{na+b}{n}\right]=\left[a+\frac{b}{n}\right]=a,$$

hiszen $0\le\frac{b}{n}\le\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n}=1$

Az egyenlet jobb oldala:

$$\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{na+b+\{x\}}{n}\right]=\left[a+\frac{b+\{x\}}{n}\right]=a,$$

hiszen $0\le\frac{b+\{x\}}{n}<\frac{b+1}{n}\le\frac{(n-1)+1}{n}=\frac{n}{n}=1$

Az egyenlet bal oldala és a jobb oldala minden szóba jöhető értékre megegyezik, tehát azonossággal van dolgunk.

5. *Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán:*

$$n\,[x]\le[nx]\,; \qquad n\in\mathbb{N}^+$$

Megoldás

Alkalmazzuk az 1. feldatban szereplő egyenlőtlenség bal oldalát egymás $n-2$-szer

$$n\,[x]=\underbrace{[x]+[x]+\ldots+[x]}_{n\text{ darab}}=[x]+[x]+\underbrace{[x]+[x]+\ldots+[x]}_{n-2\text{ darab}}$$

$$\leq [2x] + \underbrace{[x] + [x] + \ldots + [x]}_{n-2 \text{ darab}} = [2x] + [x] + \underbrace{[x] + [x] + \ldots + [x]}_{n-3 \text{ darab}} \leq$$

$$\leq [3x] + \underbrace{[x] + [x] + \ldots + [x]}_{n-3 \text{ darab}} \leq \ldots \leq [nx]$$

$$n\,[x] \leq [nx]$$

Egyenlőség akkor, ha

$$\{x\} < \frac{1}{n}$$

6. *Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán.*

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$$

Megoldás

Vizsgáljuk egyenletünket két részre bontva!

I. eset Legyen $n \leq x < n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, ekkor $[x] = n$ és

$$n + \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} < n + 1 \qquad\qquad 2n \leq 2x < 2n + 1$$

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = n \qquad\qquad [2x] = 2n$$

Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$n + n = 2n$$

Azaz azonossággal van dolgunk.

II. eset Legyen $n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1$, $n \in Z$, ekkor $[x] = n$ és

$$n + 1 \leq x + \frac{1}{2} < n + \frac{3}{2} \qquad\qquad 2n + 1 \leq 2x < 2n + 2$$

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = n + 1 \qquad\qquad [2x] = 2n + 1$$

Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$n + (n + 1) = 2n + 1$$

Azaz azonossággal van dolgunk ebben az esetben is.

Összefoglalva: átvizsgáltunk minden esetet és mindig azonosságot kaptunk.

7. *Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán.*

$$[x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = [3x]$$

Megoldás

Vizsgáljuk egyenletünket három részre bontva!

I. eset Legyen $n \le x < n + \frac{1}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$, ekkor $[x] = n$ és

$$n + \frac{1}{3} \le x + \frac{1}{3} < n + \frac{2}{3} \qquad n + \frac{2}{3} \le x + \frac{2}{3} < n + 1 \qquad 3n \le 3x < 3n + 1$$

$$\left[x + \frac{1}{3}\right] = n \qquad \left[x + \frac{2}{3}\right] = n \qquad [3x] = 3n$$

Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$n + n + n = 3n$$

Azaz azonossággal van dolgunk.

II. eset Legyen $n + \frac{1}{3} \le x < n + \frac{2}{3}$, $n \in Z$, ekkor $[x] = n$ és

$$n + \frac{2}{3} \le x + \frac{1}{3} < n + 1 \qquad n + 1 \le x + \frac{2}{3} < n + \frac{4}{3} \qquad 3n + 1 \le 3x < 3n + 2$$

$$\left[x + \frac{1}{3}\right] = n \qquad \left[x + \frac{2}{3}\right] = n + 1 \qquad [3x] = 3n + 1$$

Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$n + n + (n + 1) = 3n + 1$$

Azaz azonossággal van dolgunk ebben az esetben is.

III. eset Legyen $n + \frac{2}{3} \le x < n + 1$, $n \in Z$, ekkor $[x] = n$ és

$$n + 1 \le x + \frac{1}{3} < n + \frac{4}{3} \qquad n + \frac{4}{3} \le x + \frac{2}{3} < n + \frac{5}{3} \qquad 3n + 2 \le 3x < 3n + 3$$

$$[x + 1] = n + 1 \qquad \left[x + \frac{2}{3}\right] = n + 1 \qquad [3x] = 3n + 2$$

Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$n + (n + 1) + (n + 1) = 3n + 2$$

Azaz azonossággal van dolgunk ebben az esetben is.

Összefoglalva: átvizsgáltunk minden értéket és mindig azonosságot kaptunk.

8. *Igazoljuk a következő azonosságot a valós számok halmazán.*

$$[x] + \left[x + \frac{1}{4}\right] + \left[x + \frac{2}{4}\right] + \left[x + \frac{3}{4}\right] = [4x]$$

Megoldás

A megoldás hasonló az előző két feladat megoldásánál látható módhoz, azaz

- Négy részre kell bontani az 1 hosszú intervallumot
- Részenként vizsgálva a kifejezéseket
- Minden esetben azonosságra lehet jutni

3.2. Lineáris egyenletek

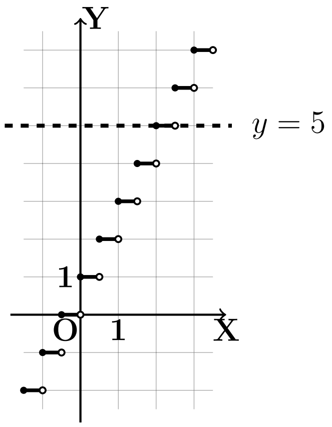
9. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$[2x+1]=5$$

Megoldás

Használjuk a definíciót

$$\begin{aligned}[2x+1]&=5\\ 5\leq&2x+1<6\\ 4\leq&2x<5\\ 2\leq&x<\frac{5}{2}\end{aligned}$$



10. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$\{2x+1\}=0$$

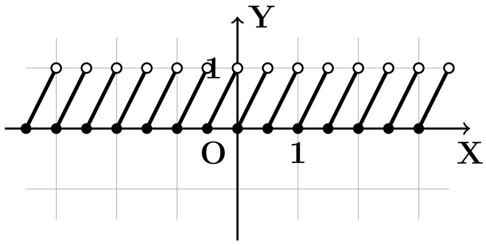
Megoldás

Ha

$$\{2x+1\}=0$$

akkor $2x+1$ egész szám

$$\begin{aligned} 2x+1 &= n \qquad n\in\mathbb{Z} \\ 2x &= n-1 \\ x &= \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$



11. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

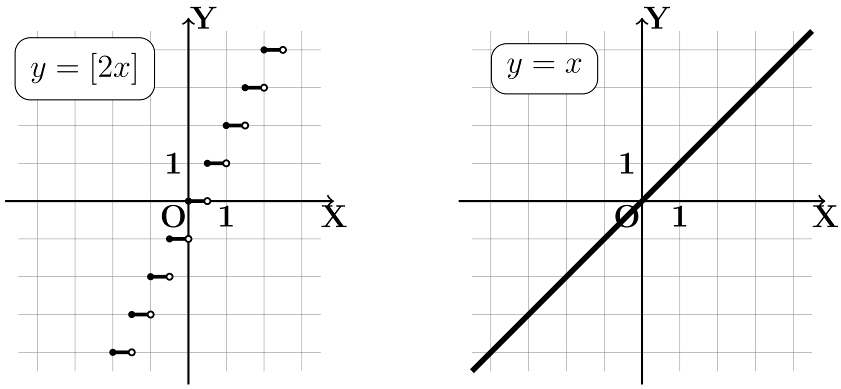
$$[2x] = x$$

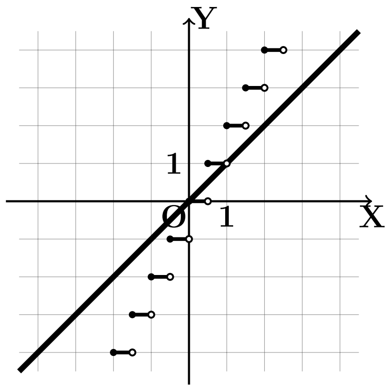
Megoldás

Az egyenlet bal oldalán egész szám áll, tehát a jobb oldalon is egésznek kell állnia, azaz a keresett ismeretlen egész szám, ekkor viszont a kétszerese is egész szám, azaz

$$\begin{aligned}[2x] &= x \qquad x \in \mathbb{Z}\\ 2x &= x\\ x &= 0\end{aligned}$$

A megoldás tehát egyetlen érték.





12. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

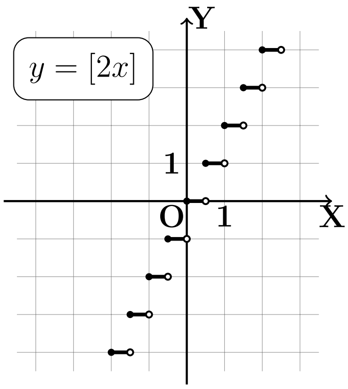
$$[2x] = x - 1$$

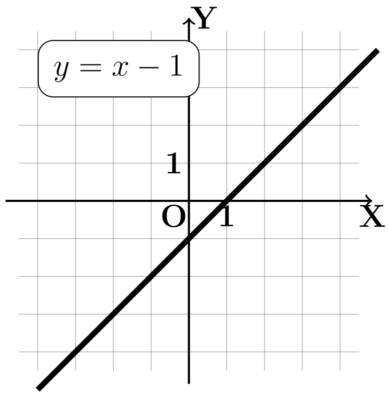
Megoldás

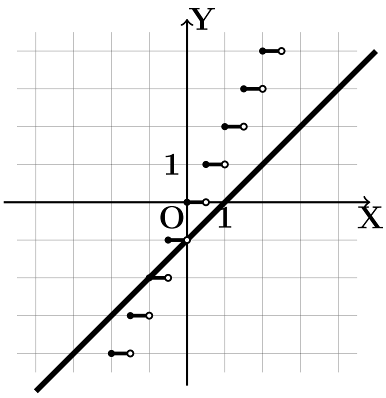
Az egyenlet bal oldalán egész szám áll, tehát a jobb oldalon is egésznek kell állnia, azaz a keresett ismeretlen egész szám, ekkor viszont a kétszerese is egész szám, azaz

$$\begin{aligned} [2x] &= x - 1 \\ 2x &= x - 1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

A megoldás tehát egyetlen érték.







13. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$[2x] = [x]$$

Megoldás

Vizsgáljuk egyenletünket két esetre bontva!

I. eset Legyen $n \leq x < n + \frac{1}{2}$, $n \in Z$, ekkor

$$\begin{aligned} 2n \leq 2x < 2n + 1 \\ [2x] = 2n \end{aligned}$$

Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$\begin{aligned} 2n =& n \\ n =& 0 \end{aligned}$$

Tehát $0 \leq x < \frac{1}{2}$

II. eset Legyen $n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1$, $n \in Z$, ekkor

$$\begin{aligned} 2n + 1 \leq 2x < 2n + 2 \\ [2x] = 2n + 1 \end{aligned}$$

Ekkor a megoldandó egyenlet:

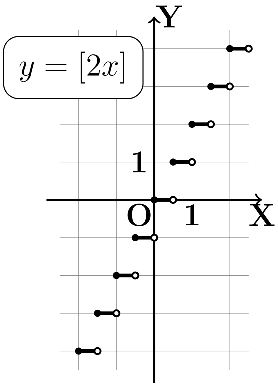
$$\begin{aligned} 2n + 1 =& n \\ n =& -1 \end{aligned}$$

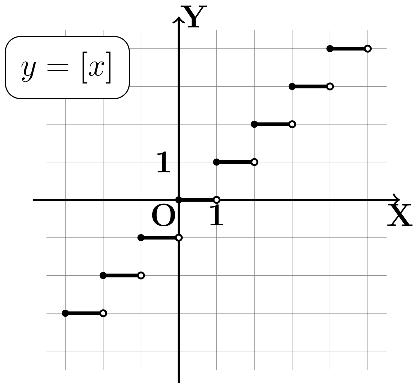
Tehát $-\frac{1}{2} \leq x < 0$

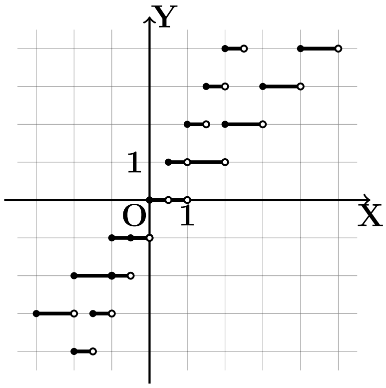
Összefoglalva: A megoldásra kapott két intervallum

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad -\frac{1}{2} \leq x < 0$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$$


$y = [2x]$
Y
1
O
1
X


$y = [x]$
Y
1
O
1
X


Y
1
O
1
X

14. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$[2x] = [x] - 1$$

Megoldás

Vizsgáljuk egyenletünket két esetre bontva!

I. eset Legyen $n \leq x < n + \frac{1}{2}$, $n \in Z$, ekkor

$$2n \leq 2x < 2n + 1$$
$$[2x] = 2n$$

Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$2n = n - 1$$
$$n = -1$$

Tehát $-1 \leq x < -\frac{1}{2}$

II. eset Legyen $n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1$, $n \in Z$, ekkor

$$2n + 1 \leq 2x < 2n + 2$$
$$[2x] = 2n + 1$$

Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$2n + 1 = n - 1$$
$$n = -2$$

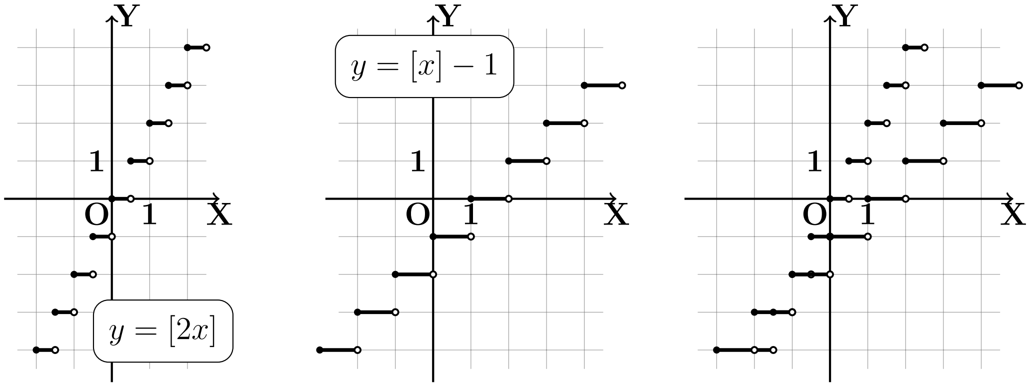
Tehát $-\frac{3}{2} \leq x < -1$

Összefoglalva:

A megoldásra kapott két intervallum

$$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad -\frac{3}{2} \leq x < -1$$

$$-\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2}$$



15. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$2\,[x] = [2x]$$

Megoldás

Vizsgáljuk egyenletünket két részre bontva!

I. eset Legyen $n \le x < n + \dfrac{1}{2}$, $n \in Z$, ekkor

$$2n \le 2x < 2n + 1$$
$$[2x] = 2n$$

Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$2n = 2n$$

Azonosságot kaptunk, tehát $n \le x < n + \dfrac{1}{2}$, $n \in Z$

II. eset Legyen $n + \dfrac{1}{2} \le x < n + 1$, $n \in Z$, ekkor

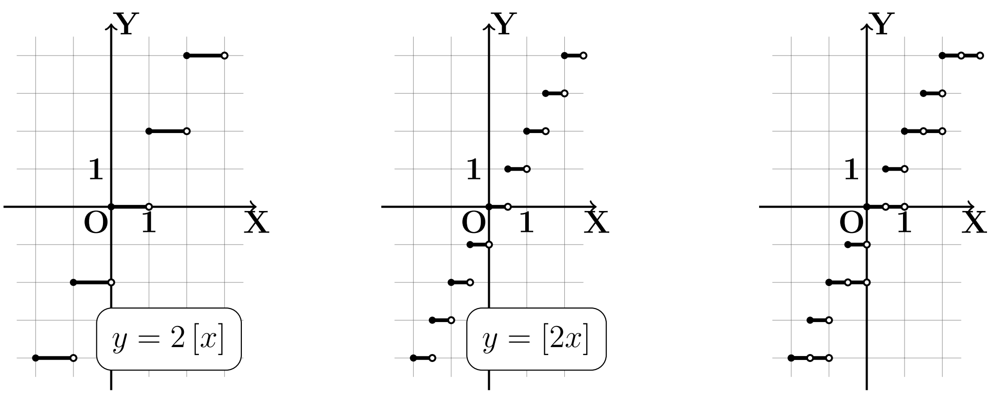
$$2n + 1 \le 2x < 2n + 2$$
$$[2x] = 2n + 1$$

Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$2n = 2n - 1$$

Tehát ellentmondást kaptunk.

Összefoglalva: $n \le x < n + \dfrac{1}{2}$, $n \in Z$



16. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$[x] + x = [2x]$$

Megoldás

Az egyenlet jobb oldalán egész szám áll, tehát a bal oldalon is egésznek kell állnia, azaz a keresett ismeretlen egész szám, ekkor viszont a kétszerese is egész szám, azaz

$$\begin{aligned} [x] + x &= [2x]\,; \qquad x \in \mathbb{Z} \\ 2x &= 2x \end{aligned}$$

Azonosságot kaptunk, tehát minden $x \in Z$ megoldás.

17. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$[x+3] = 3 + [x]$$

Megoldás

Az egészrész definícióját figyelembe véve adódik, hogy azonosság (megtalálható a a 3. oldalon, ott a 3. azonosság), tehát minden $x \in R$ megoldás.

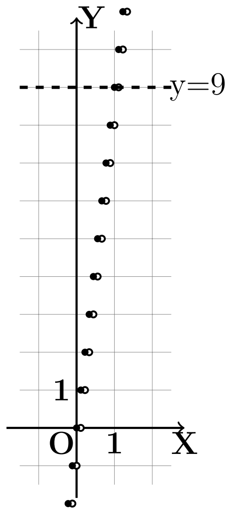
18. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$[9x] = 9$$

Megoldás

A defincíciót figyelembe véve:

$$9 \leq 9x < 10$$
$$1 \leq x < \frac{10}{9}$$



19. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$2[x] = 5\{x+2\}$$

Megoldás

Az egyenlet bal oldala egész, és még páros is tehát a jobb oldalon páros egész szám áll, azaz

$$\begin{aligned} 0 \leq \{x+2\} &< 1 \\ 0 \leq 5\{x+2\} &< 5 \end{aligned}$$

ezen az intervallumon csak 3 páros egész szám van, tehát $5\{x+2\} \in \{0;\ 2;\ 4\}$

$$\begin{aligned} 5\{x+2\} &= 0 & 5\{x+2\} &= 2 & 5\{x+2\} &= 4 \\ \{x+2\} &= 0 & \{x+2\} &= \frac{2}{5} & 5\{x+2\} &= \frac{4}{5} \\ \{x\} &= 0 & \{x\} &= \frac{2}{5} & 5\{x\} &= \frac{4}{5} \\ 2[x] &= 0 & 2[x] &= 2 & 2[x] &= 4 \\ [x] &= 0 & [x] &= 1 & [x] &= 2 \\ x = [x] + \{x\} &= 0 & x = [x] + \{x\} &= \frac{7}{5} & x = [x] + \{x\} &= \frac{14}{5} \end{aligned}$$

A megoldások tehát

$$x \in \left\{0;\ \frac{7}{5};\ \frac{14}{5}\right\}$$

20. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$2\{x\} = 5[x+2]$$

Megoldás

Az egyenlet jobb oldala egy 5-tel osztható egész szám, míg a bal oldal

$$0 \leq \{x\} < 1$$

$$0 \leq 2\{x\} < 2$$

$$0 \leq 5[x+2] < 2$$

Ezen az intervallumon csak egy öttel osztható szám van, tehát

$$\begin{aligned} 5[x+2] &= 0 \\ [x+2] &= 0 \\ [x]+2 &= 0 \\ [x] &= -2 \end{aligned} \qquad \text{és} \qquad \begin{aligned} 2\{x\} &= 0 \\ \{x\} &= 0 \end{aligned}$$

Tehát

$$x = [x] + \{x\} = -2$$

21. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$[2x] = 2\,[x] - 1$$

Megoldás

Vizsgáljuk egyenletünket két részre bontva!

I. eset Legyen $n \le x < n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, ekkor

$$n \le x < n + \frac{1}{2} \qquad\qquad 2n \le 2x < 2n + 1$$
$$[x] = n \qquad\qquad [2x] = 2n$$

Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$2n = 2n - 1$$

Azaz ellentmondással van dolgunk.

II. eset Legyen $n + \frac{1}{2} \le x < n + 1$, $n \in Z$, ekkor

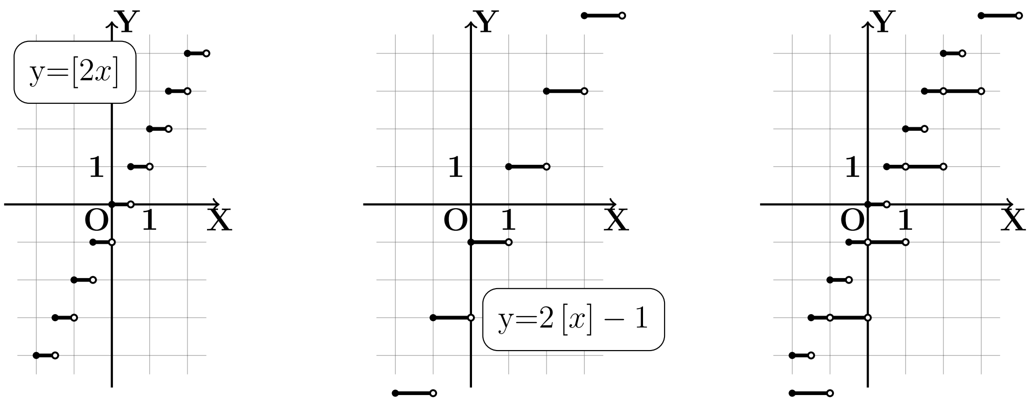
$$n + \frac{1}{2} \le x < n + 1 \qquad\qquad 2n + 1 \le 2x < 2n + 2$$
$$[x] = n \qquad\qquad [2x] = 2n + 1$$

Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$2n + 1 = 2n - 1$$

Azaz ellentmondással van dolgunk.

Összefoglalva: átvizsgáltunk minden értéket és mindig ellentmondást kaptunk.



22. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$[2x] = 3x - 1$$

Megoldás

A bal oldalon egész szám áll, legyen ez $n \in \mathbb{Z}$. Ekkor

$$n = [2x] = 3x - 1$$

A bal és a jobb oldal számolva

$$\begin{aligned} n \leq 2x &< n + 1 \\ \frac{n}{2} \leq x &< \frac{n+1}{2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} n &= 3x - 1 \\ x &= \frac{n+1}{3} \end{aligned}$$

A kapottak egybetétele

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} \leq \frac{n+1}{3} &< \frac{n+1}{2} \\ 3n \leq 2n + 2 &< 3n + 3 \\ n \leq 2 &< n + 3 \\ -1 < n &\leq 2 \end{aligned}$$

Ebben az intervallumban csak 3 egész szám van

$$n \in \{0;\ 1;\ 2\}$$

ekkor $x = \dfrac{n+1}{3}$ összefüggéssel számolva

$$x \in \left\{\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ 1\right\}$$

23. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$\left[x-\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$$

Megoldás

Vizsgáljuk egyenletünket két részre bontva!

I. eset Legyen $n \le x < n+\frac{1}{2}$, $n \in Z$, ekkor

$$n-\frac{1}{2} \le x-\frac{1}{2} < n \qquad n+\frac{1}{2} \le x+\frac{1}{2} < n+1 \qquad 2n \le 2x < 2n+1$$

$$\left[x-\frac{1}{2}\right]=n-1 \qquad \left[x+\frac{1}{2}\right]=n \qquad [2x]=2n$$

Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$(n-1)+n=2n$$

$$2n-1=2n$$

Ami ellentmondás, ebben az intervallumban nincs megoldása a feladatnak.

II. eset Legyen $n+\frac{1}{2} \le x < n+1$, $n \in Z$, ekkor

$$n \le x-\frac{1}{2} < n+\frac{1}{2} \qquad n+1 \le x+\frac{1}{2} < n+\frac{3}{2} \qquad 2n+1 \le 2x < 2n+2$$

$$\left[x-\frac{1}{2}\right]=n \qquad \left[x+\frac{1}{2}\right]=n+1 \qquad [2x]=2n+1$$

Ekkor a megoldandó egyenlet:

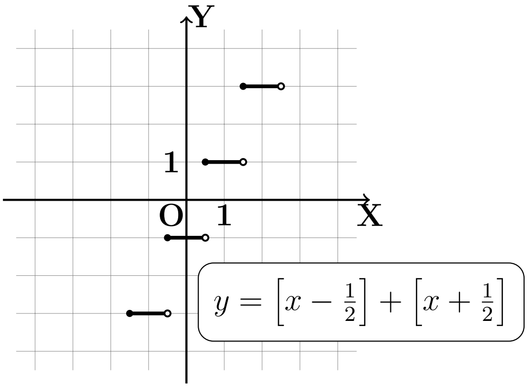
$$n+(n+1)=2n+1$$

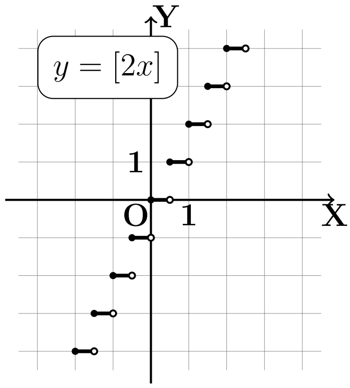
$$2n+1=2n+1$$

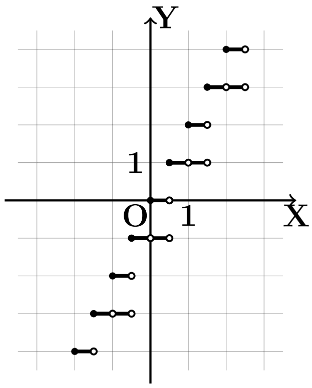
azaz azonossággal van dolgunk.

Tehát a feladat összes megoldása

$$n+\frac{1}{2} \le x < n+1,\ n \in Z$$


Y
1
O 1
X
$y = \left[x - \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{1}{2}\right]$


Y
$y = [2x]$
1
O 1
X


Y
1
O 1
X

24. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$\left[x - \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [3x]$$

Megoldás

Vizsgáljuk egyenletünket négy részre bontva!

I. eset Legyen $n \leq x < n + \dfrac{1}{3}$, $n \in Z$, ekkor

$$n - \frac{1}{2} \leq x - \frac{1}{2} < n - \frac{1}{6} \qquad n + \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} < n + \frac{5}{6} \qquad 3n \leq 3x < 3n + 1$$

$$\left[x - \frac{1}{2}\right] = n - 1 \qquad \left[x + \frac{1}{2}\right] = n \qquad [3x] = 3n$$

Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$(n-1) + n = 3n$$

$$2n - 1 = 3n$$

A megoldás $n = -1$, ekkor $-1 \leq x < -\dfrac{2}{3}$

II. eset Legyen $n + \dfrac{1}{3} \leq x < n + \dfrac{1}{2}$, $n \in Z$, ekkor

$$n - \frac{1}{6} \leq x - \frac{1}{2} < n \qquad n + \frac{5}{6} \leq x + \frac{1}{2} < n + 1 \qquad 3n + 1 \leq 3x < 3n + \frac{3}{2}$$

$$\left[x - \frac{1}{2}\right] = n - 1 \qquad \left[x + \frac{1}{2}\right] = n \qquad [3x] = 3n + 1$$

Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$(n-1) + n = 3n + 1$$

$$2n - 1 = 3n + 1$$

A megoldás $n = -2$, ekkor $-\dfrac{5}{3} \leq x < -\dfrac{3}{2}$

III. eset Legyen $n + \dfrac{1}{2} \leq x < n + \dfrac{2}{3}$, $n \in Z$, ekkor

$$n \leq x - \frac{1}{2} < n + \frac{1}{6} \qquad n + 1 \leq x + \frac{1}{2} < n + \frac{7}{6} \qquad 3n + \frac{3}{2} \leq 3x < 3n + 2$$

$$\left[x - \frac{1}{2}\right] = n \qquad \left[x + \frac{1}{2}\right] = n + 1 \qquad [3x] = 3n + 1$$

Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$n + (n+1) = 3n + 1$$

$$2n + 1 = 3n + 1$$

A megoldás $n = 0$, ekkor $\frac{1}{2} \le x < \frac{2}{3}$

IV. eset Legyen $n + \frac{2}{3} \le x < n + 1$, $n \in Z$, ekkor

$$n + \frac{1}{6} \le x - \frac{1}{2} < n + \frac{1}{2} \qquad n + \frac{7}{6} \le x + \frac{1}{2} < n + \frac{3}{2} \qquad 3n + 2 \le 3x < 3n + 3$$

$$\left[x - \frac{1}{2}\right] = n \qquad \left[x + \frac{1}{2}\right] = n + 1 \qquad [3x] = 3n + 2$$

Ekkor a megoldandó egyenlet:

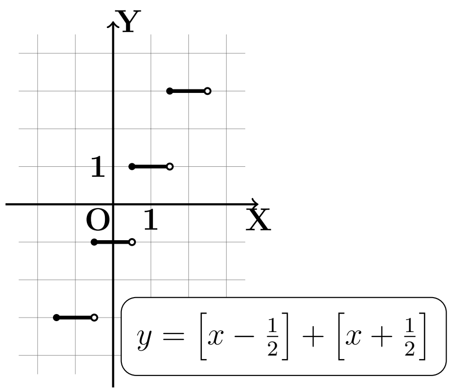
$$n + (n + 1) = 3n + 2$$

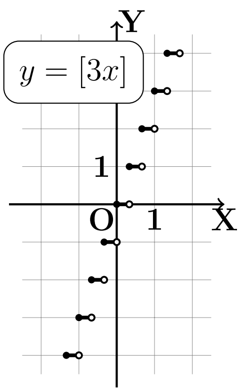
$$2n + 1 = 3n + 2$$

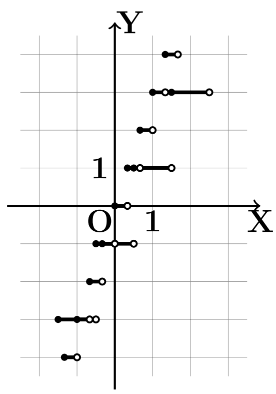
A megoldás $n = -1$, ekkor az ismeretlen $-\frac{1}{3} \le x < 0$

Összefoglalva:

$$-\frac{5}{3} \le x < -\frac{3}{2} \text{ vagy } -1 \le x < -\frac{2}{3} \text{ vagy } -\frac{1}{3} \le x < 0 \text{ vagy } \frac{1}{2} \le x < \frac{2}{3}$$







25. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$[x] + [2x] + [3x] = [6x]$$

Megoldás

Bontsuk hat részre a vizsgált feladatot!

Legyen $n \leq x < n + \dfrac{1}{6}$, $n \in Z$, ekkor

$$\begin{array}{cccc} n \leq x < n + \dfrac{1}{6} & 2n \leq 2x < n + \dfrac{1}{3} & 3n \leq 3x < 3n + \dfrac{1}{2} & 6n \leq 6x < 6n + 1 \\ [x] = n & [2x] = 2n & [3x] = 3n & [6x] = 6n \end{array}$$

Így az egyenlet

$$n + 2n + 3n = 6n$$

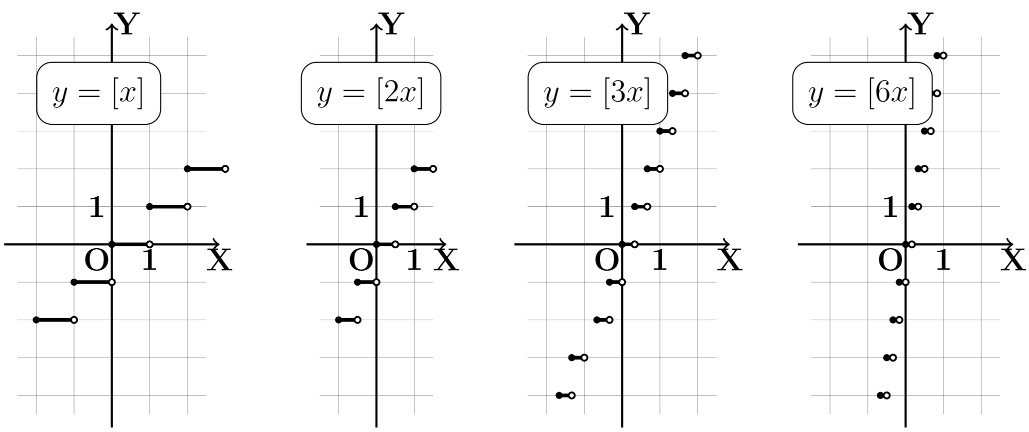
ami azonosság.

A többi intervallumot kezeljük ugyanígy, a könnyebb leírás érdekében gyűjtsük táblázatba:

$n \in Z$	$[x]$	$[2x]$	$[3x]$	$[6x]$	Egyenlet	
$n \leq x < n + \frac{1}{6}$	n	2n	3n	6n	$n + 2n + 3n = 6n$	azonosság
$n + \frac{1}{6} \leq x < n + \frac{2}{6}$	n	2n	3n	6n+1	$n + 2n + 3n = 6n + 1$	ellentmondás
$n + \frac{2}{6} \leq x < n + \frac{3}{6}$	n	2n	3n+1	6n+2	$n + 2n + 3n + 1 = 6n + 2$	ellentmondás
$n + \frac{3}{6} \leq x < n + \frac{4}{6}$	n	2n+1	3n+1	6n+3	$n + 2n + 1 + 3n + 1 = 6n + 3$	ellentmondás
$n + \frac{4}{6} \leq x < n + \frac{5}{6}$	n	2n+1	3n+2	6n+4	$n + 2n + 1 + 3n + 2 = 6n + 4$	ellentmondás
$n + \frac{5}{6} \leq x < n + \frac{6}{6}$	n	2n+1	3n+2	6n+5	$n + 2n + 1 + 3n + 2 = 6n + 5$	ellentmondás

Tehát a feladat összes megoldása

$$n \leq x < n + \frac{1}{6}; \qquad n \in \mathbb{Z}$$



26. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$\left[\frac{[x]+[2x]+[3x]}{6}\right]=x$$

Megoldás

Az egyenlet bal oldala egész szám, ezért a jobb oldal is egész, tehát $x \in \mathbb{Z}$. Ekkor $[x]=x$, valamint $[2x]=2x$, $[3x]=3x$ és $[6x]=6x$. Így egyenletünk:

$$\begin{aligned}\left[\frac{[x]+[2x]+[3x]}{6}\right] &= x\\ \left[\frac{x+2x+3x}{6}\right] &= x\\ \left[\frac{6x}{6}\right] &= x\\ [x] &= x\end{aligned}$$

Ez viszont azonosság, hiszen $x \in \mathbb{Z}$.

27. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$x - 1 = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{6}\right]$$

Megoldás

Mivel az egyenlet jobb oldala egész szám, ezért a bal oldalnak is egész számnak kell lennie, tehát $x \in \mathbb{Z}$.
Keressük a megoldást a 6-tal való osztási maradék szerint, legyen $n \in \mathbb{Z}$:

Szám	$\left[\frac{x}{2}\right]$	$\left[\frac{x}{3}\right]$	$\left[\frac{x}{6}\right]$	Egyenlet	
$x = 6n$	$3n$	$2n$	n	$6n - 1 = 3n + 2n + n$	ellentmondás
$x = 6n + 1$	$3n$	$2n$	n	$(6n + 1) - 1 = 3n + 2n + n$	azonosság
$x = 6n + 2$	$3n + 1$	$2n$	n	$(6n + 2) - 1 = (3n + 1) + 2n + n$	azonosság
$x = 6n + 3$	$3n + 1$	$2n + 1$	n	$(6n + 3) - 1 = (3n + 1) + (2n + 1) + n$	azonosság
$x = 6n + 4$	$3n + 2$	$2n + 1$	n	$(6n + 4) - 1 = (3n + 2) + (2n + 1) + n$	azonosság
$x = 6n + 5$	$3n + 2$	$2n + 1$	n	$(6n + 5) - 1 = (3n + 2) + (2n + 1) + n$	ellentmondás

Összefoglalva:

$$x \in \{6n + 1;\ 6n + 2;\ 6n + 3;\ 6n + 4\}\,;\ n \in Z$$

alakú számok a megoldások.

28. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$x-1=\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{4}\right]$$

Megoldás

Mivel az egyenlet jobb oldala egész szám, ezért a bal oldalnak is egész számnak kell lennie. Tehát $x \in \mathbb{Z}$. Ezért keressük a megoldást a 12-vel való osztási maradék szerint:

Szám	$\left[\frac{x}{2}\right]$	$\left[\frac{x}{3}\right]$	$\left[\frac{x}{4}\right]$	Egyenlet	Megoldás
$x=12n$	$6n$		$3n$	$12n-1=6n+4n+3n$	$n=-1;\ x=-12$
$x=12n+1$	$6n$	$4n$	$3n$	$(12n+1)-1=6n+4n+3n$	$n=0;\ x=1$
$x=12n+2$	$6n+1$	$4n$	$3n$	$(12n+2)-1=(6n+1)+4n+3n$	$n=0;\ x=2$
$x=12n+3$	$6n+1$	$4n+1$	$3n$	$(12n+3)-1=(6n+1)+(4n+1)+3n$	$n=0;\ x=3$
$x=12n+4$	$6n+2$	$4n+1$	$3n+1$	$(12n+4)-1=(6n+2)+(4n+1)+(3n+1)$	$n=-1;\ x=-8$
$x=12n+5$	$6n+2$	$4n+1$	$3n+1$	$(12n+5)-1=(6n+2)+(4n+1)+(3n+1)$	$n=0;\ x=5$
$x=12n+6$	$6n+3$	$4n+2$	$3n+1$	$(12n+6)-1=(6n+3)+(4n+2)+(3n+1)$	$n=-1;\ x=-6$
$x=12n+7$	$6n+3$	$4n+2$	$3n+1$	$(12n+7)-1=(6n+3)+(4n+2)+(3n+1)$	$n=0;\ x=7$
$x=12n+8$	$6n+4$	$4n+2$	$3n+2$	$(12n+8)-1=(6n+4)+(4n+2)+(3n+2)$	$n=-1;\ x=-4$
$x=12n+9$	$6n+4$	$4n+3$	$3n+2$	$(12n+9)-1=(6n+4)+(4n+3)+(3n+2)$	$n=-1;\ x=-3$
$x=12n+10$	$6n+5$	$4n+3$	$3n+2$	$(12n+10)-1=(6n+5)+(4n+3)+(3n+2)$	$n=-1;\ x=-2$
$x=12n+11$	$6n+5$	$4n+3$	$3n+2$	$(12n+11)-1=(6n+5)+(4n+3)+(3n+2)$	$n=0;\ x=11$

Összefoglalva: A megoldások:

$$x \in \{\ -12,\ -8,\ -6,\ -4,\ -3,\ -2, 1, 2, 3, 5, 7, 11\ \}$$

29. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$\left[\frac{6x+5}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$$

Megoldás

Az egyenlet bal oldalán egész szám áll, tehát a jobb oldal is egész, legyen $n \in Z$.

$$\left[\frac{6x+5}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}=n$$

Ekkor

$$\left[\frac{6x+5}{8}\right]=n \qquad\qquad \frac{15x-7}{5}=n$$

$$n \le \frac{6x+5}{8} < n+1 \qquad\qquad x=\frac{5n+7}{15}$$

$$\frac{8n-5}{6} \le x < \frac{8n+3}{6}$$

Azaz

$$\begin{aligned}
\frac{8n-5}{6} &\le x < \frac{8n+3}{6}\\
\frac{8n-5}{6} &\le \frac{5n+7}{15} < \frac{8n+3}{6}\\
5(8n-5) &\le 2(5n+7) < 5(8n+3)\\
40n-25 &\le 10n+14 < 40n+15\\
30n-25 &\le 14 < 30n+15\\
-25 &\le 14-30n < 15\\
-39 &\le -30n < 1\\
-\frac{1}{30} &< n \le \frac{39}{30}
\end{aligned}$$

Ezen az intervallumon csak két egész szám van

$$n \in \{0;\ 1\}$$

ekkor

$$x \in \left\{\frac{7}{15};\ \frac{4}{5}\right\}$$

30. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$\left[\frac{5x+3}{6}\right]=\frac{6x-1}{5}$$

Megoldás

Az egyenlet bal oldalán egész szám áll, tehát a jobb oldal is egész, legyen $n \in \mathbb{Z}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\left[\frac{5x+3}{6}\right] &= n\\ n \le \frac{5x+3}{6} &< n+1\\ \frac{6n-3}{5} \le x &< \frac{6n+3}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{6x-1}{5} &= n\\ x &= \frac{5n+1}{6}\end{aligned}$$

Azaz

$$\begin{aligned}\frac{6n-3}{5} \le \frac{5n+1}{6} &< \frac{6n+3}{5}\\ 6\,(6n-3) \le 5\,(5n+1) &< 6\,(6n+3)\\ 36n-18 \le 25n+5 &< 36n+18\\ 11n-18 \le 5 &< 11n+18\\ -18 \le 5-11n &< 18\\ -23 \le -11n &< 13\\ -\frac{13}{11} < n &\le \frac{23}{18}\end{aligned}$$

Ezen az intervallumon levő egész számok

$$n \in \{\,-1;\ 0;\ 1\,\}$$

tehát

$$x \in \left\{-\frac{2}{3};\ \frac{1}{6};\ 1\right\}$$

31. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$[x-1]=\left[\frac{x+2}{2}\right]$$

Megoldás

Az egyenlet mindkét oldala egész szám, legyen ez $n \in \mathbb{Z}$. Ekkor

$$\begin{aligned}[x-1] &= n & \left[\frac{x+2}{2}\right] &= n \\ n \le x-1 &< n+1 & n \le \frac{x+2}{2} &< n+1 \\ n+1 \le x &< n+2 & 2n-2 \le x &< 2n\end{aligned}$$

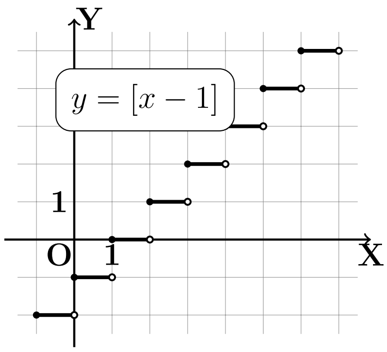
Ahhoz, hogy legyen megoldás teljesülni kell, hogy az intervallumoknak legyen közös pontja, azaz az intervallumok kezdő és végértékére teljesülni kell, hogy

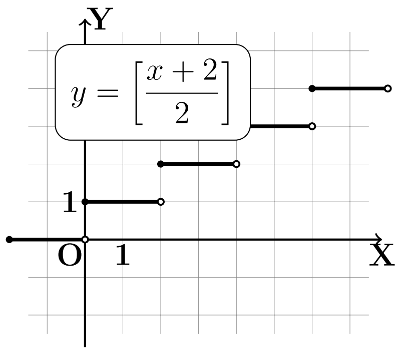
$$\begin{aligned}n+1 &< 2n & 2n-2 &< n+2 \\ 1 &< n & n &< 4\end{aligned}$$

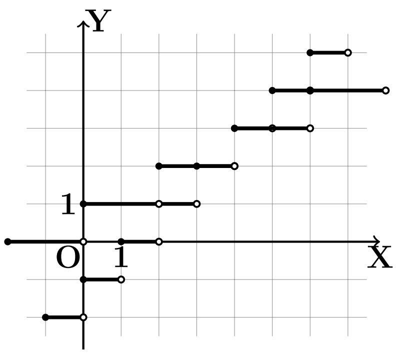
$$1<n<4$$

Így a lehetséges értékek 2 és 3, az intervallumok pedig

$$\begin{cases} n=2 \;\Rightarrow\; \{3 \le x < 4\} \cap \{2 \le x < 4\} \;\Rightarrow\; 3 \le x < 4 \\ n=3 \;\Rightarrow\; \{4 \le x < 5\} \cap \{4 \le x < 6\} \;\Rightarrow\; 4 \le x < 5 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad 3 \le x < 5$$







32. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$[x-2]=\left[\frac{x+2}{3}\right]$$

Megoldás

Az egyenlet mindkét oldalán egész szám áll, legyen $n \in \mathbb{Z}$. Ekkor

$$\left[\frac{x+2}{3}\right]=n \qquad\qquad [x-2]=n$$

$$n \le \frac{x+2}{3} < n+1 \qquad\qquad n \le x-2 < n+1$$

$$3n-2 \le x < 3n+1 \qquad\qquad n+2 \le x < n+3$$

Ez akkor fog teljesülni, ha a két intervallumnak van közös pontja, azaz igaz, hogy

$$3n-2 < n+3 \qquad\qquad n+2 < 3n+1$$

$$n < \frac{5}{2} \qquad\qquad \frac{1}{2} < n$$

$$\frac{1}{2} < n < \frac{5}{2}$$

Ebben az intervallumban 2 egész szám van, ezek az 1 és a 2.

I. eset $n=1$

$$1 \le x < 4 \qquad\qquad 3 \le x < 4$$

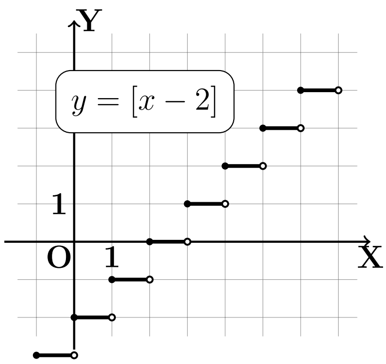
$$3 \le x < 4$$

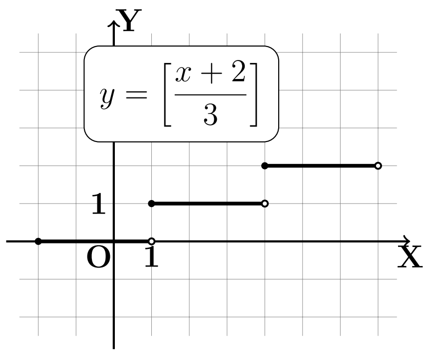
II. eset $n=2$

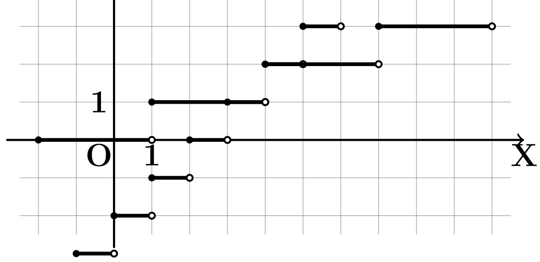
$$4 \le x < 7 \qquad\qquad 4 \le x < 5$$

$$4 \le x < 5$$

Összefoglalva: $3 \le x < 5$







3.3. Nem lineáris egyenletek

33. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$2^{[x]} = 2x + 1$$

Megoldás

Mivel $2^{[x]} > 0$ ezért

$$\begin{aligned} 2x + 1 &> 0 \\ x &> -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vizsgáljuk egyenletünket nyolc részre bontva!

I. eset Legyen $-\frac{1}{2} < x < 0$, ekkor $[x] = -1$

$$\begin{aligned} 2^{-1} &= 2x + 1 \\ x &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Jó megoldás!

II. eset Legyen $0 \leq x < 1$, ekkor $[x] = 0$

$$\begin{aligned} 2^{0} &= 2x + 1 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Jó megoldás!

III. eset Legyen $1 \leq x < 2$, ekkor $[x] = 1$

$$\begin{aligned} 2^{1} &= 2x + 1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nem jó megoldás!

IV. eset Legyen $2 \leq x < 3$, ekkor $[x] = 2$

$$\begin{aligned} 2^{2} &= 2x + 1 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Nem jó megoldás!

V. eset Legyen $3 \leq x < 4$, ekkor $[x] = 3$

$$\begin{aligned} 2^{3} &= 2x + 1 \\ x &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Jó megoldás!

VI. eset Legyen $4 \leq x < 5$, ekkor $[x] = 4$

$$\begin{aligned} 2^4 =& 2x + 1 \\ x =& \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Nem jó megoldás!

VII. eset Legyen $5 \leq x < 6$, ekkor $[x] = 5$

$$\begin{aligned} 2^5 =& 2x + 1 \\ x =& \frac{31}{2} \end{aligned}$$

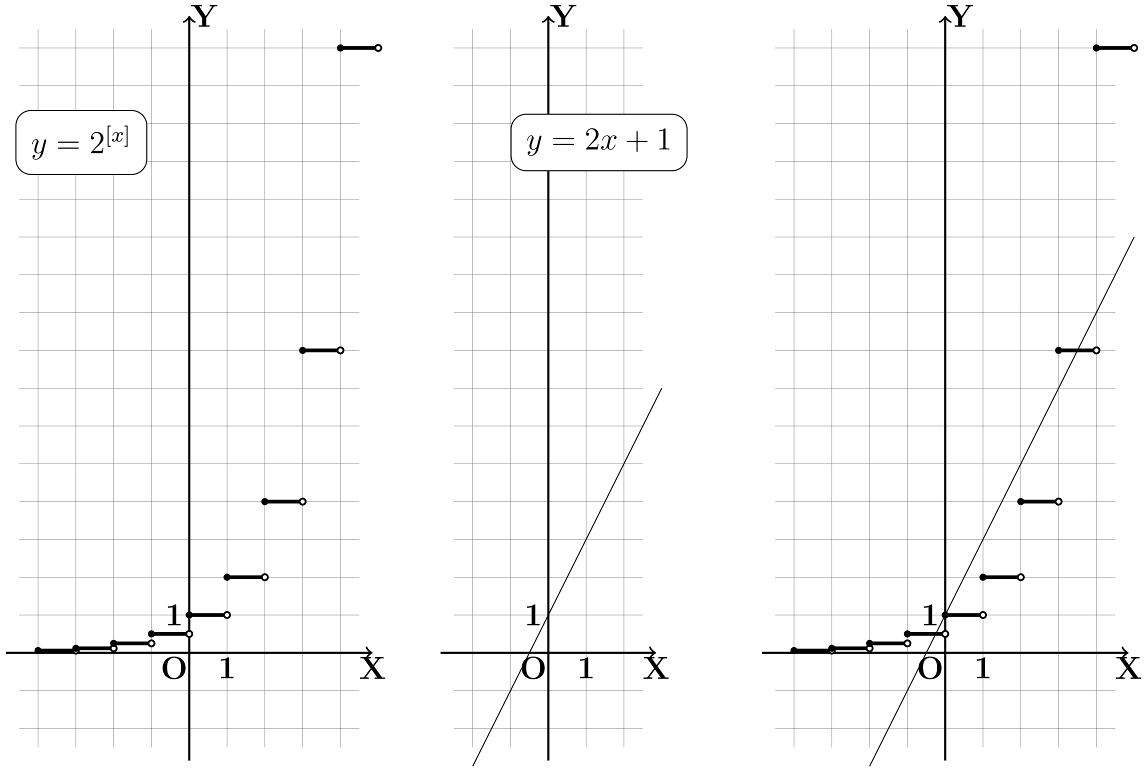
Nem jó megoldás!

VIII. eset Használjuk azt az ismert állítást, hogy $2^n > 2n + 3$, ha $n \geq 5$
Legyen $5 \leq n \leq x < n + 1,\ n \in N$, ekkor

$$\begin{aligned} [x] =& n \\ 2^{[x]} \geq 2^n > 2n + 3 =& 2(n+1) + 1 > 2x + 1 \\ 2^{[x]} >& 2x + 1 \end{aligned}$$

Nincs több megoldás!

Összefoglalva: $x \in \left\{ -\frac{1}{4};\ 0;\ \frac{7}{2} \right\}$



34. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$[2^x] = 2x + 1$$

Megoldás

Mivel $2^x > 0$ ezért $[2^x] \geq 0$ egész szám, ami legyen n.

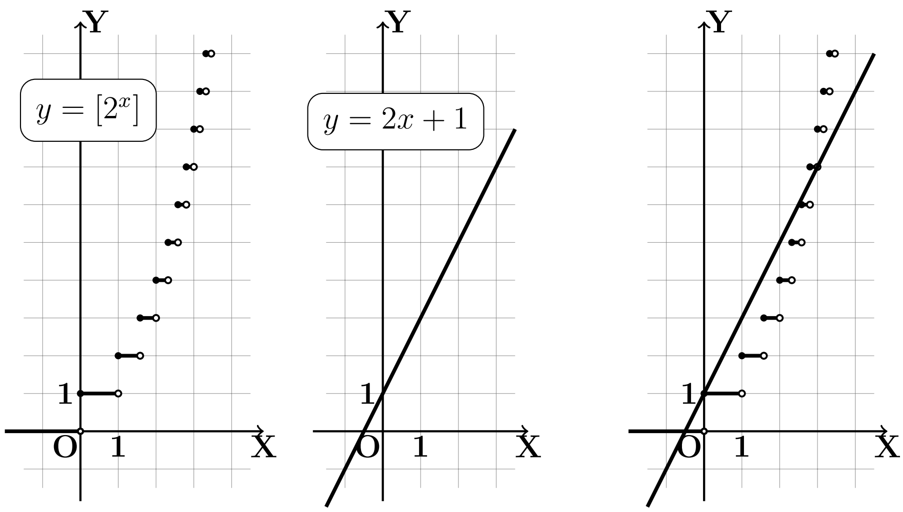
$$n = 2x + 1 \geq 0$$
$$x \geq -\frac{1}{2}$$

Nézzük az egyenletet n értékei szerint $0 \leq n \leq 8$ esetekre.

n	Jobb oldal	Megoldás	Bal oldal ekkor	
0	$2x+1=0$	$x=-\frac{1}{2}$	$[2^x]=0$	Jó
1	$2x+1=1$	$x=0=\frac{0}{2}$	$[2^x]=1$	Jó
2	$2x+1=2$	$x=\frac{1}{2}$	$[2^x]=1\neq 2$	
3	$2x+1=3$	$x=1=\frac{2}{2}$	$[2^x]=2\neq 3$	
4	$2x+1=4$	$x=\frac{3}{2}$	$[2^x]=2\neq 4$	
5	$2x+1=5$	$x=2=\frac{4}{2}$	$[2^x]=4\neq 5$	
6	$2x+1=6$	$x=\frac{5}{2}$	$[2^x]=5\neq 6$	
7	$2x+1=7$	$x=3=\frac{6}{2}$	$[2^x]=8\neq 7$	
8	$2x+1=8$	$x=\frac{7}{2}$	$[2^x]=11\neq 8$	

Legyen $n \geq 9$ ($x \geq 4{,}5$). A jobb oldal egyesével nő, míg a bal oldal $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} > 1{,}4$ szeresére változik, tehát innentől biztosan nincs megoldás.

Összefoglalva: $x \in \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$.



35. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$3^{[x]} = 3x + 1$$

Megoldás

Mivel $3^{[x]} > 0$ ezért

$$3x + 1 > 0; \qquad \Rightarrow \qquad x > -\frac{1}{3}$$

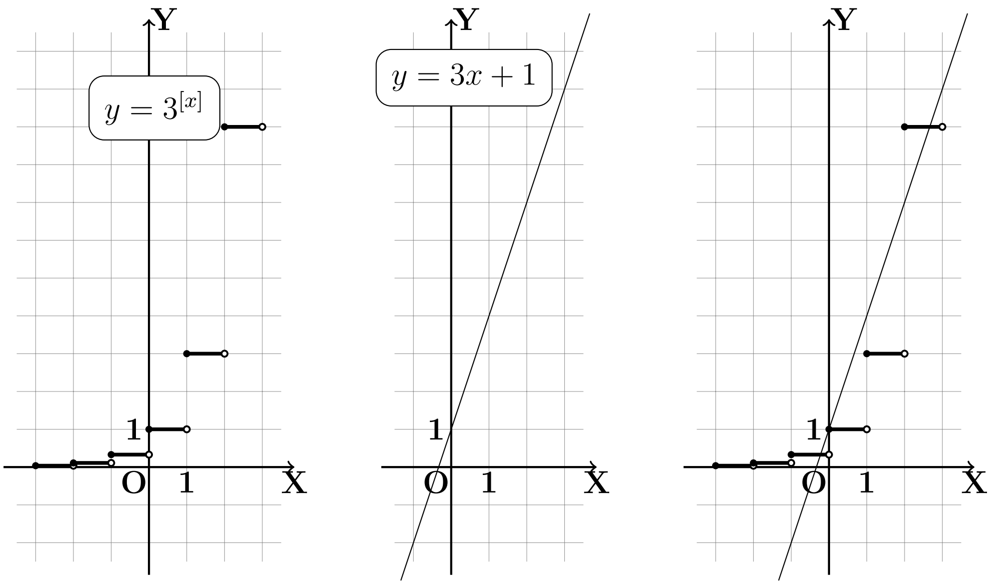
Intervallum	$[x]$	Egyenlet	Megoldás	
$-\frac{1}{3} < x < 0$	$[x] = -1$	$3^{-1} = 3x + 1$	$x = -\frac{2}{9}$	Jó
$0 \le x < 1$	$[x] = 0$	$3^0 = 3x + 1$	$x = 0$	Jó
$1 \le x < 2$	$[x] = 1$	$3^1 = 3x + 1$	$x = \frac{2}{9}$	
$2 \le x < 3$	$[x] = 2$	$3^2 = 3x + 1$	$x = \frac{8}{9}$	Jó
$3 \le x < 4$	$[x] = 3$	$3^3 = 3x + 1$	$x = \frac{26}{9}$	

Használjuk azt az ismert állítást, hogy

$$3^n > 3n + 4, \text{ ha } n > 4$$

Legyen $4 < n \le x < n + 1,\ n \in N$, ekkor $[x] = n$,

$$3^{[x]} \ge 3^n > 3n + 4 = 3\,(n + 1) + 1 > 3x + 1$$
$$3^{[x]} > 3x + 1$$



36. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$[3^x] = 3x + 1$$

Megoldás

Mivel $3^x > 0$ ezért $[3^x] \geq 0$

$$3x + 1 \geq 0$$
$$x \geq -\frac{1}{3}$$

Intervallum	Bal oldal	Jobb oldal	Megoldás	
$-\frac{1}{3} \leq x < 0$	$[3^x] = 0$	$0 = 3x + 1$	$x = -\frac{1}{3}$	Jó megoldás.
$0 \leq x < \log_3 2$	$[3^x] = 1$	$1 = 3x + 1$	$x = 0$	Jó megoldás.
$\log_3 2 \leq x < \log_3 3$	$[3^x] = 2$	$2 = 3x + 1$	$x = \frac{1}{3}$	
$\log_3 3 \leq x < \log_3 4$	$[3^x] = 3$	$3 = 3x + 1$	$x = \frac{2}{3}$	
$\log_3 4 \leq x < \log_3 5$	$[3^x] = 4$	$4 = 3x + 1$	$x = 1$	
$\log_3 5 \leq x < \log_3 6$	$[3^x] = 5$	$5 = 3x + 1$	$x = \frac{4}{3}$	
$\log_3 6 \leq x < \log_3 7$	$[3^x] = 6$	$6 = 3x + 1$	$x = \frac{5}{3}$	

Legyen $7 \leq n$, $(n \in \mathbb{N})$, melyre

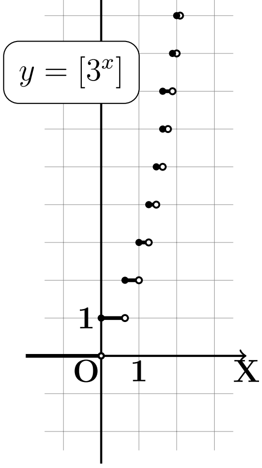
$$[3^x] = n \qquad 3x + 1 = n$$
$$n \leq 3^x < n + 1 \qquad x = \frac{n-1}{3}$$

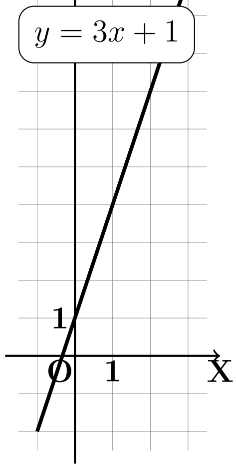
$$n \leq 3^{\frac{n-1}{3}} < n + 1$$

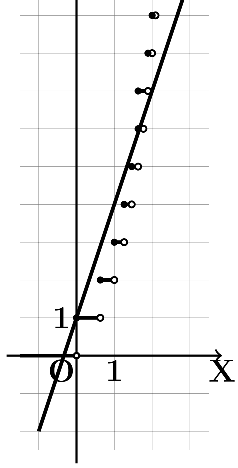
Mivel

$$3^{\frac{n-1}{3}} < n + 1 \qquad \Rightarrow \qquad n \leq 6$$

Tehát nincs több megoldás.







37. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$8^{\left[\frac{4x+1}{5}\right]} = 2^{7x-1}$$

Megoldás

Alakítsuk át az egyenletet a hatványozás azonosságainak felhasználásával:

$$\begin{aligned}
8^{\left[\frac{4x+1}{5}\right]} &= 2^{7x-1}\\
\left(2^3\right)^{\left[\frac{4x+1}{5}\right]} &= 2^{7x-1}\\
2^{3\left[\frac{4x+1}{5}\right]} &= 2^{7x-1}\\
3\left[\frac{4x+1}{5}\right] &= 7x-1\\
\left[\frac{4x+1}{5}\right] &= \frac{7x-1}{3}
\end{aligned}$$

Az egyenlet bal oldalán egész szám áll, tehát a jobb oldal is egész, legyen $n \in \mathbb{Z}$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\left[\frac{4x+1}{5}\right] &= n\\
n \le \frac{4x+1}{5} &< n+1\\
\frac{5n-1}{4} \le x &< \frac{5n+4}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{7x-1}{3} &= n\\
x &= \frac{3n+1}{7}
\end{aligned}$$

Azaz

$$\begin{aligned}
\frac{5n-1}{4} \le x &< \frac{5n+4}{4}\\
\frac{5n-1}{4} \le \frac{3n+1}{7} &< \frac{5n+4}{4}\\
7(5n-1) \le 4(3n+1) &< 7(5n+4)\\
35n-7 \le 12n+4 &< 35n+28\\
23n-7 \le 5 &< 23n+28\\
-7 \le -23n+5 &< 28\\
-12 \le -23n &< 23\\
\frac{12}{23} \ge n &> -1
\end{aligned}$$

Ezen az intervallumon csak egy egész szám van, $n = 0$, ekkor $x = \frac{1}{7}$

38. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$8^{\left[\frac{4x+1}{3}\right]} = 2^{2x-1}$$

Megoldás

Alakítsuk át az egyenletet a hatványozás azonosságainak felhasználásával:

$$\begin{aligned}
8^{\left[\frac{4x+1}{5}\right]} &= 2^{2x-1} \\
\left(2^3\right)^{\left[\frac{4x+1}{5}\right]} &= 2^{2x-1} \\
2^{3\left[\frac{4x+1}{5}\right]} &= 2^{2x-1} \\
3\left[\frac{4x+1}{5}\right] &= 2x-1 \\
\left[\frac{4x+1}{5}\right] &= \frac{2x-1}{3}
\end{aligned}$$

Az egyenlet bal oldalán egész szám áll, tehát a jobb oldal is egész, legyen $n \in \mathbb{Z}$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\left[\frac{4x+1}{5}\right] &= n \\
n \le \frac{4x+1}{5} &< n+1 \\
\frac{5n-1}{4} \le x &< \frac{5n+4}{4}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\frac{2x-1}{3} &= n \\
x &= \frac{3n+1}{2}
\end{aligned}$$

Azaz

$$\begin{aligned}
\frac{5n-1}{4} \le x &< \frac{5n+4}{4} \\
\frac{5n-1}{4} \le \frac{3n+1}{2} &< \frac{5n+4}{4} \\
5n-1 \le 2\left(3n+1\right) &< 5n+4 \\
5n-1 \le 6n+2 &< 5n+4 \\
-1 \le n+2 &< 4 \\
-3 \le n &< 2
\end{aligned}$$

Tehát $n \in \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1\}$, azaz $x \in \left\{-4;\ -\frac{5}{2};\ -1;\ \frac{1}{2};\ 2\right\}$

39. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$\left[x^3\right] + \left[x^2\right] + [x] = \{x\} - 1$$

Megoldás

Az egyenlet bal oldala egész szám, tehát egész szám áll a jobb oldalon is.

$$\begin{gathered} 0 \leq \{x\} < 1 \\ -1 \leq \{x\} - 1 < 0 \end{gathered}$$

Ez csak akkor egész, ha a törtrész nulla, azaz egész szám a keresett megoldás. Ekkor

$$\begin{aligned} \left[x^3\right] + \left[x^2\right] + [x] =& \{x\} - 1 \\ x^3 + x^2 + x =& -1 \\ x^3 + x^2 + x + 1 =& 0 \\ (x+1)\left(x^2+1\right) =& 0 \\ x = -1, \qquad x^2 + 1 \neq& 0 \end{aligned}$$

40. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$\left[x^2\right] = [x]^2$$

Megoldás

Legyen $[x] = n;\ \ n \in \mathbb{Z}$, ekkor $n \leq x < n + 1$ és

$$\begin{aligned} \left[x^2\right] &= [x]^2 = n^2 \\ \left[x^2\right] &= n^2 \\ n^2 \leq x^2 &< n^2 + 1 \\ |n| \leq |x| &< \sqrt{n^2 + 1} \end{aligned}$$

Előjel szerint bontva az eseteket

I. eset Ha $n \geq 0$ Mivel ekkor

$$\sqrt{n^2 + 1} \leq n + 1$$

ezért

$$\begin{cases} n \leq x < \sqrt{n^2 + 1} \\ n \leq x < n + 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad n \leq x < \sqrt{n^2 + 1}$$

II. eset Ha $n < 0$

$$\begin{cases} -\sqrt{n^2 + 1} < x \leq n \\ n \leq x < n + 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x = n$$

Összefoglalva:

$$\begin{cases} n \leq x < \sqrt{n^2 + 1}; & n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \\ x = n; & n \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$$

41. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$[x] = 1 + \left\{x^2 - 1\right\}$$

Megoldás

Az egyenlet bal oldala egész, tehát a jobb oldal is egész, azaz

$$0 \le \left\{x^2 - 1\right\} < 1$$

$$\left\{x^2 - 1\right\} = 0$$

$$x^2 - 1 \in \mathbb{Z}$$

Ezeket használva az eredeti egyenletet

$$\begin{aligned}
[x] &= 1 + \left\{x^2 - 1\right\} \\
\left\{x^2 - 1\right\} &= 0 \\
[x] &= 1 \\
1 &\le x < 2 \\
&\text{tehát } x \text{ pozitív} \\
1 &\le x^2 < 4 \\
0 &\le x^2 - 1 < 3
\end{aligned}$$

Ezen az intervallumon csak három egész szám van, tehát

$$x^2 - 1 = \begin{cases} 0; & \Rightarrow \quad x = 1 \\ 1; & \Rightarrow \quad x = \sqrt{2} \\ 2; & \Rightarrow \quad x = \sqrt{3} \end{cases}$$

42. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$x^3 - [x] = 3$$

Megoldás

Átrendezve az egyenletet

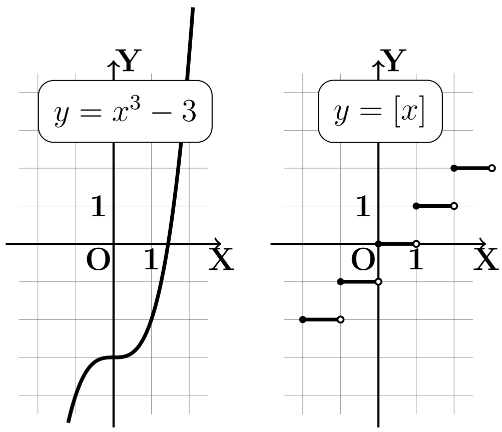
$$x^3 = 3 + [x]$$

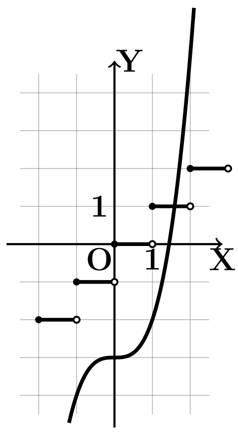
a definíciót használva, legyen $[x] = n$; $n \in \mathbb{Z}$, ekkor $x^3 = n + 3$ és

$$\begin{aligned} n &\le x < n+1 \\ n^3 &\le x^3 < (n+1)^3 \\ n^3 &\le 3 + n < (n+1)^3 \end{aligned}$$

Ez nyilvánvalóan $n = 1$-re igaz csak. Ekkor

$$x = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}587\,401\,052$$





43. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$2^x - 2 = [[x] - x]$$

Megoldás

Az egyenlet jobb oldalát gondoljuk meg, hogy mit jelent:

$$\begin{aligned} x &= [x] + \{x\} \\ [x] - x &= -\{x\} \\ [[x] - x] &= [-\{x\}] \end{aligned}$$

Mivel a törtrészről tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 \le \{x\} &< 1 \\ -1 < -\{x\} &\le 0 \end{aligned}$$

Ezért

$$[-\{x\}] = \begin{cases} 0 & \{x\} = 0;\ x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \{x\} > 0;\ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

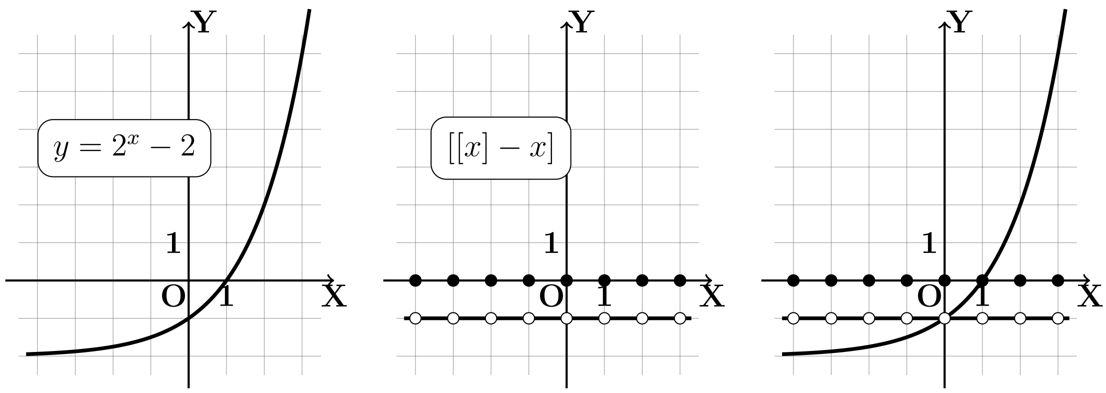
Ekkor egyenletünk

$$2^x - 2 = \begin{cases} 0 & \{x\} = 0;\ x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \{x\} > 0;\ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Megoldva

$$\begin{aligned} x &\in \mathbb{Z} \\ 2^x - 2 &= 0 \\ 2^x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x &\notin \mathbb{Z} \\ 2^x - 2 &= -1 \\ 2^x &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

A feltételek miatt csak az $x = 1$ megfelelő.



44. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$x^2 - [x] = 6\{x\}$$

Megoldás

Átalakítva

$$\begin{aligned} x^2 - [x] &= 6\{x\} \\ x^2 - [x] - \{x\} &= 5\{x\} \\ x^2 - x &= 5\{x\} \end{aligned}$$

A definíciót használva

$$0 \leq 5\{x\} < 5$$

$$0 \leq x^2 - x < 5$$

$$0 \leq x^2 - x \qquad\qquad x^2 - x < 5$$

$$x \leq 0 \text{ vagy } 1 \leq x \qquad\qquad \frac{1-\sqrt{21}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

$$\frac{1-\sqrt{21}}{2} < x \leq 0 \quad \text{vagy} \quad 1 \leq x < \frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

Az eredeti egyenletet $\{x\}$-re megoldva

$$\begin{aligned} x^2 - [x] &= 6\{x\} \\ ([x] + \{x\})^2 - [x] &= 6\{x\} \\ \{x\}^2 + 2\{x\}([x] - 3) + [x]^2 - [x] &= 0 \\ \{x\}_{1,2} &= 3 - [x] \pm \sqrt{9 - 5[x]} \end{aligned}$$

Végignézve $[x]$ lehetséges értékeit

Intervallum	$[x]$	$0 \leq \{x\} < 1$	Megoldás ($[x] + \{x\}$)
$\frac{1-\sqrt{21}}{2} < x < -1$	-2	$5 \pm \sqrt{19}$	
		Jó: $5 - \sqrt{19}$	$3 - \sqrt{19}$
$-1 \leq x < 0$	-1	$4 \pm \sqrt{14}$	
		Jó: $4 - \sqrt{14}$	$3 - \sqrt{14}$
$0 \leq x < 1$	0	3 ± 3	
		Jó: $3 - 3$	$0 + 0 = 0$
$1 \leq x < 2$	1	2 ± 2	
		Jó: $2 - 2$	$1 + 0 = 1$

45. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$\left[x^2\right] - x = 6\{x\}$$

Megoldás

Átrendezve egyenletünket

$$\left[x^2\right] = x + 6\{x\} = [x] + \{x\} + 6\{x\} = [x] + 7\{x\}$$

Egyenletünk bal oldalán egész szám áll, akkor a jobb oldalán is az áll, tehát

$$7\{x\} \in \mathbb{Z}$$
$$0 \le 7\{x\} < 7$$
$$7\{x\} \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$
$$\{x\} \in \left\{0; \frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}; \frac{4}{7}; \frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right\}$$

Most x nagyságrendjét megbecsülve

$$x^2 - 1 < \left[x^2\right] \le x^2$$
$$x^2 - x - 1 < \left[x^2\right] - x \le x^2 - x$$
$$x^2 - x - 1 < 6\{x\} \le x^2 - x$$
$$x^2 - x \le 6 \quad \text{és} \quad 0 < x^2 - x + 1$$
$$-2 < x < 3$$
$$[x] \in \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$$

Figyelembe véve a megoldásra kapott becsléseket, $[x]$ és $\{x\}$ értékei:

	-2	-1	0	1	2	3
0	–	–	$x=0$	$x=1$	–	–
$\frac{1}{7}$	–	$x=-\frac{6}{7}$	–	–	–	–
$\frac{2}{7}$	–	–	–	–	–	–
$\frac{3}{7}$	–	–	–	–	$x=\frac{17}{7}$	–
$\frac{4}{7}$	$x=-\frac{10}{7}$	–	–	–	$x=\frac{18}{7}$	–
$\frac{5}{7}$	–	–	–	–	$x=\frac{19}{7}$	–
$\frac{6}{7}$	–	–	–	–	$x=\frac{20}{7}$	–

46. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$\left[x^4\right] - 2\left[x^2\right] = \{x\} - 1$$

Megoldás

Az egyenlet bal oldalán egész szám áll, tehát a jobb oldalon is egésznek kell állnia, azaz a törtrész csak a nulla lehet. A keresett ismeretlen egész szám. Ekkor

$$\begin{aligned}\left[x^4\right] - 2\left[x^2\right] &= \{x\} - 1\\ x^4 - 2x^2 &= -1\\ \left(x^2 - 1\right)^2 &= 0\\ x^2 &= 1\\ x &= \pm 1\end{aligned}$$

47. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$\left[\frac{1}{\{x\}}\right] = [x]$$

Megoldás

A nevező nem lehet nulla, azaz

$$\{x\} \neq 0; \qquad \Rightarrow \qquad 0 < \{x\} < 1$$

Tehát x nem egész szám. Legyen $[x] = n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$. Ekkor

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\{x\}}\right] &= [x] = n \\ n \leq \frac{1}{\{x\}} &< n+1 \\ \frac{1}{n+1} < \{x\} &\leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Azaz

$$\begin{aligned} [x] + \frac{1}{n+1} < [x] + \{x\} &\leq [x] + \frac{1}{n} \\ n + \frac{1}{n+1} < x &\leq n + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Mivel x nem lehet egész, ezért a megoldás

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2} < x < 2 & n = 1 \\ n + \dfrac{1}{n+1} < x \leq n + \dfrac{1}{n} & n > 1 \end{cases}$$

48. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$\left\{\frac{1}{[x]}\right\} = \{x\}$$

Megoldás

Legyen $[x] = n \ \ (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$, ekkor

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = \{x\}$$

Ha $n = -1$, akkor

$$\begin{aligned} \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{\frac{1}{-1}\right\} &= 0 = \{x\} \\ x &= [x] + \{x\} \\ x &= -1 + 0 = -1 \end{aligned}$$

Ha $n < -1$, akkor

$$\begin{aligned} -1 < \frac{1}{n} &< 0 \\ \left\{\frac{1}{n}\right\} &= \frac{1}{n} + 1 = \frac{n+1}{n} = \{x\} \\ x &= [x] + \{x\} \\ x &= n + \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+n+1}{n} \end{aligned}$$

Ha $n = 1$, akkor

$$\begin{aligned} \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{\frac{1}{1}\right\} &= 0 = \{x\} \\ x &= [x] + \{x\} \\ x &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Ha $1 < n$, akkor

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{n} &< 1 \\ \left\{\frac{1}{n}\right\} &= 0 = \{x\} \\ x &= [x] + \{x\} \\ x &= n + 0 = n \end{aligned}$$

Azaz a megoldás

$$x = \begin{cases} \dfrac{n^2+n+1}{n}, & n < -1 \\ -1, & n = -1 \\ 1, & n = 1 \\ n, & 1 < n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{cases} \dfrac{n^2+n+1}{n}, & n \le -1 \\ n, & 1 \le n \end{cases}$$

3.4. Egyenletrendszerek

49. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán*

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + \{y\} = 6 \end{cases}$$

Megoldás

Az első egyenletből a másodikat kivonva

$$\begin{aligned} y - \{y\} &= 1 \\ [y] &= 1 \\ 1 \le y &< 2 \end{aligned}$$

és ekkor

$$x = 7 - y$$

vagy paraméteresen felírva

$$\begin{cases} x = 6 - p \\ y = 1 + p \end{cases} \qquad \text{ahol} \;\; 0 \le p < 1, \; p \in \mathbb{R}$$

50. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán*

$$\begin{cases} x+y=3 \\ [x]+\{y\}=7 \end{cases}$$

Megoldás

A második egyenlet szerint
- $[x]$ egész szám
- $\{y\}=7-[x]$ is egész ezek szerint
- Mivel $0 \le \{y\} < 1$ és egész tehát

$$\{y\}=0, \qquad \Rightarrow \qquad y \in \mathbb{Z}$$

és

$$[x]=7$$

Az első egyenlet szerint $x+y=3$ és y egész szám, ezért x is egész szám, azaz

$$x=7$$

Innen

$$y=-4$$

3.5. Variációk egy feladatra

51. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán*

$$\begin{cases} x+y=5 \\ [xy]=6 \end{cases}$$

Megoldás

A második egyenlet szerint

$$[xy]=6, \qquad \Rightarrow \qquad 6 \le xy < 7$$

tehát x és y azonos előjelűek, az első egyenletet figyelembe véve mind a kettő pozitív.

$$\begin{aligned} x+y&=5 \\ y&=5-x \\ [xy]&=6 \\ [x(5-x)]&=6 \end{aligned}$$

A definíciót használva:

$$\begin{aligned} 6 &\le x(5-x) < 7 \\ 6 &\le 5x-x^2 < 7 \end{aligned}$$

Külön választva a két egyenlőtlenséget

$$\begin{aligned} 6 &\le 5x-x^2 \qquad & 5x-x^2 &< 7 \\ x^2-5x+6 &\le 0 & 0 &< x^2-5x+7 \\ 2 \le x &\le 3 & \forall x &\in R \end{aligned}$$

$$2 \le x \le 3$$

Tehát összefoglalva,

$$\begin{cases} x=p \\ y=5-p \end{cases} \qquad \text{ahol} \;\; 2 \le p \le 3, \;\; p \in \mathbb{R}$$

52. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán*

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x\,[y]=6 \end{cases}$$

Megoldás

A második egyenlet szerint xy pozitív, tehát x és y azonos előjelűek, az első egyenletet figyelembe véve mind a kettő pozitív.

$$\begin{aligned} x+y&=5 \\ y&=5-x \\ x\,[y]&=6 \\ x\,[5-x]&=6 \\ [5-x]&=\frac{6}{x}=n; \qquad n\in N^{+} \end{aligned}$$

A definíciót használva:

$$\begin{gathered} |5-x|=n \\ n\le 5-x<n+1 \\ n\le 5-\frac{6}{n}<n+1 \\ n^2\le 5n-6<n^2+n \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} n^2&\le 5n-6 \qquad\qquad & 5n-6&<n^2+n \\ n^2-5n+6&\le 0 & 0&<n^2-4n+6 \\ 2\le n&\le 3 & \forall n&\in N \end{aligned}$$

A kapott intervallumon csak 2 egész szám van, tehát

$$n=2 \qquad \Rightarrow \qquad x=3; \quad y=2$$

$$n=3 \qquad \Rightarrow \qquad x=2; \quad y=3$$

53. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán*

$$\begin{cases} x + [y] = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Megoldás

A második egyenlet szerint xy pozitív, tehát x és y azonos előjelűek, az első egyenletet figyelembe véve mind a kettő pozitív.

$$0 \leq [y]\,; \qquad 0 < x$$

Mivel $x = 5 - |y|$, ezért x is egész szám

$$x \in Z^+$$

Foglaljuk táblázatba x lehetséges értékeit, vegyük figyelembe, hogy

$$0 < x \leq 5 \quad \text{és} \quad 0 \leq y \leq 5$$

x	$y = \dfrac{6}{x}$	$[y]$	Megfelelő?
5	1,2	1	–
4	1,5	1	Jó
3	2	2	Jó
2	3	3	Jó
1	6	6	–

54. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán*

$$\begin{cases} [x+y]=5 \\ xy=6 \end{cases}$$

Megoldás

A második egyenlet szerint xy pozitív, tehát x és y azonos előjelűek, az első egyenletet figyelembe véve mind a kettő pozitív.

$$\begin{aligned} y &= \frac{6}{x} \\ [x+y] &= 5 \\ \left[x+\frac{6}{x}\right] &= 5 \\ 5 \le x+\frac{6}{x} &< 6 \\ 5x \le x^2+6 &< 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x &\le x^2+6 \\ 0 &\le x^2-5x+6 \\ x \le 2 \quad &\text{vagy} \quad 3 \le x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x^2+6 &< 6x \\ x^2-6x+6 &< 0 \\ 3-\sqrt{3} < x &< 3+\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$3-\sqrt{3} < x \le 2 \qquad \text{vagy} \qquad 3 \le x < 3+\sqrt{3}$$

Tehát összefoglalva,

$$\begin{cases} x = p \\ y = \dfrac{6}{p} \end{cases} \qquad \text{ahol} \qquad \begin{cases} 3-\sqrt{3} < p \le 2 \\ \quad\text{vagy} \\ 3 \le p < 3+\sqrt{3} \end{cases} \qquad p \in \mathbb{R}$$

55. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán*

$$\begin{cases} [x+y]=5 \\ [xy]=6 \end{cases}$$

Megoldás

A második egyenlet szerint xy pozitív, tehát x és y azonos előjelűek, az első egyenletet figyelembe véve mind a kettő pozitív. Vezessünk be új ismeretleneket $x+y$ és xy helyett.

$$5 \le x+y=a<6; \qquad a \in R^+$$

$$6 \le xy=b<7; \qquad b \in R^+$$

Ekkor a megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$$

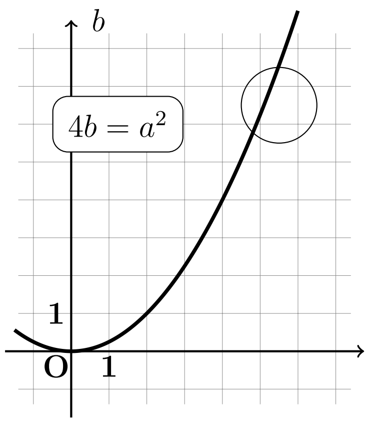
Megoldva

$$x_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2};\ y_1=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

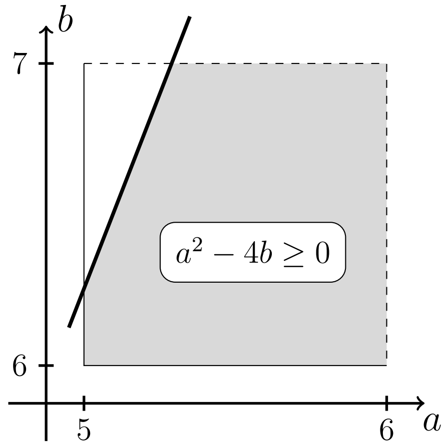
$$x_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2};\ y_2=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

ahol a paraméterekre

$$5 \le a < 6 \qquad \text{és} \qquad 6 \le b < 7 \qquad (a^2-4b \ge 0)$$



$\Rightarrow$



56. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán*

$$\begin{cases} [x+y]=5 \\ x\,[y]=6 \end{cases}$$

Megoldás

A második egyenlet szerint xy pozitív, tehát x és y azonos előjelűek, az első egyenletet figyelembe véve mind a kettő pozitív.

A definíciót használva:

$$[x+y]=5$$

$$5 \le x+y < 6$$

Foglaljuk táblázatba $[y]$ lehetséges értékeit:

$[y]$	$x=\dfrac{6}{[y]}$	$5 \le x+y<6$	Megfelelő?
1	6	–	–
2	3	$2 \le y < 3$	Jó
3	2	$3 \le y < 4$	Jó
4	1,5	$4 \le y < 4{,}5$	Jó
5	1,2	–	–
6	1	–	–

57. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán*

$$\begin{cases} x + [y] = 5 \\ [xy] = 6 \end{cases}$$

Megoldás

A második egyenlet szerint xy pozitív, tehát x és y azonos előjelűek, az első egyenletet figyelembe véve mind a kettő pozitív. Az első egyenlet szerint x egész.

Továbbá

$$0 \leq [y] \leq 4 \text{ és } 1 \leq x \leq 5; \quad x \in N \text{ és } 6 \leq xy < 7$$

Foglaljuk táblázatba x lehetséges értékeit:

x	$[y] = 5 - x$	Lehetséges y	xy	Jó?
1	4	$4 \leq y < 5$	$4 \leq xy < 5$	–
2	3	$3 \leq y < 4$	$6 \leq xy < 8$	$3 \leq y < \frac{7}{2}$
3	2	$2 \leq y < 3$	$6 \leq xy < 9$	$2 \leq y < \frac{7}{3}$
4	1	$1 \leq y < 2$	$4 \leq xy < 8$	$\frac{3}{2} \leq y < \frac{7}{4}$
5	0	$0 \leq y < 1$	$0 \leq xy < 5$	–

58. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán*

$$\begin{cases} x + \{y\} = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Megoldás

Az első egyenletből kapjuk

$$4 < x = 5 - \{y\} \leq 5$$

Fejezzük ki y-t mind a két egyenletből

$$\begin{cases} x + \{y\} = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \{y\} = 5 - x \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left\{\frac{6}{x}\right\} = 5 - x$$

Tehát létezik olyan $n \in Z^+$

$$\begin{aligned} \frac{6}{x} &= n - x \\ 6 &= nx - x^2 \\ x^2 - nx + 6 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 24}}{2} \\ n^2 - 24 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad n \geq 5 \end{aligned}$$

Az egyenlet gyökeire

$$\begin{aligned} 4 <&x \leq 5 \\ 4 <&\frac{n + \sqrt{n^2 - 24}}{2} \leq 5 \\ 8 <&n + \sqrt{n^2 - 24} \leq 10 \\ 8 - n <&\sqrt{n^2 - 24} \leq 10 - n \end{aligned}$$

$$8 - n < \sqrt{n^2 - 24} \quad \Rightarrow \quad n \geq 6 \qquad\qquad \sqrt{n^2 - 24} \leq 10 - n \quad \Rightarrow \quad n \leq 6$$

$$n = 6$$

Ekkor a kapott gyökök

$$\begin{aligned} x = \frac{6 + \sqrt{12}}{2} &= 3 + \sqrt{3} \\ y &= 3 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

59. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán*

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x\{y\} = 6 \end{cases}$$

Megoldás

A második egyenletből kapjuk, hogy

$$x = \frac{6}{\{y\}} > 6$$

Fejezzük ki y-t mind a két egyenletből

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x\{y\} = 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 5 - x \\ \{y\} = \dfrac{6}{x} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \{5 - x\} = \frac{6}{x}$$

Tehát létezik olyan $n \in Z^+$

$$\begin{aligned} \frac{6}{x} &= n - x \\ 6 &= nx - x^2 \\ x^2 - nx + 6 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 24}}{2} \\ n^2 - 24 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad n \geq 5 \end{aligned}$$

Az egyenlet gyökeire

$$\begin{aligned} 6 &< x \\ 6 &< \frac{n + \sqrt{n^2 - 24}}{2} \\ 12 &< n + \sqrt{n^2 - 24} \\ 12 - n &< \sqrt{n^2 - 24} \\ 8 &\leq n \end{aligned}$$

És a megoldások

$$x = \frac{n + \sqrt{n^2 - 24}}{2}; \qquad y = \frac{n - \sqrt{n^2 - 24}}{2}; \qquad n \geq 8$$

60. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán*

$$\begin{cases} [x] + \{y\} = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Megoldás

Az első egyenletből kapjuk, hogy

$$\{y\} = 0, \;\; y = n \in N^+$$

és

$$[x] = 5, \qquad 5 \leq x = \frac{6}{n} < 6 \quad \Rightarrow \quad 5n \leq 6 < 6n$$

$$1 < n \leq \frac{6}{5}$$

Ezen az intervallumon nincs egész szám, tehát nincs megoldás!

61. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán*

$$\begin{cases} [x] + \{y\} = 5 \\ \{x\}\,[y] = 6 \end{cases}$$

Megoldás

Az egyenletek szerint mind a kettő pozitív.

Az első egyenletből kapjuk, hogy

$$\{y\} = 0,\ \ y = n \in N^{+} \quad \text{és} \quad [x] = 5$$

A másodikat használva

$$\{x\} = \frac{6}{n}; \qquad n \geq 7$$

Így a megoldások

$$x = 5 + \frac{6}{n};\ \ y = n; \qquad n \geq 7;\ \ n \in N^{+}$$

62. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán*

$$\begin{cases} [x+\{y\}] = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Megoldás

Az első egyenletre a definíciót használva

$$\begin{aligned} [x+\{y\}] &= 5 \\ 5 \le x+\{y\} &< 6 \\ 4 < x &< 6 \end{aligned}$$

Innen kapjuk, hogy

$$1 < \frac{6}{x} = y < \frac{3}{2}$$

$$\{y\} = \left\{\frac{6}{x}\right\} = \frac{6}{x} - 1$$

Ezt az eső egyenletben használva

$$\begin{aligned} [x+\{y\}] &= 5 \\ \left[x+\frac{6}{x}-1\right] &= 5 \\ 5 \le x+\frac{6}{x}-1 &< 6 \\ 6 \le x+\frac{6}{x} &< 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 &\le x+\frac{6}{x} \\ 6x &\le x^2+6 \\ 0 &\le x^2-6x+6 \\ x \le 3-\sqrt{3} \quad &\text{vagy} \quad 3+\sqrt{3} \le x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+\frac{6}{x} &< 7 \\ x^2+6 &< 7x \\ x^2-7x+6 &< 0 \\ 1 < x &< 6 \end{aligned}$$

$$3+\sqrt{3} \le x < 6$$

A megoldást paraméteresen felírva

$$\begin{cases} x = p \\ y = \dfrac{6}{p} \end{cases} \qquad 3+\sqrt{3} \le p < 6$$

3.6. Vegyes feladatok

63. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$|x| - 1 = \{x\}$$

Megoldás

A törtrész függvény értékkészletét figyelembe véve kapjuk

$$\begin{aligned} 0 \leq & x < 1 \\ 0 \leq & |x| - 1 < 1 \\ 1 \leq & |x| < 2 \end{aligned}$$

$$-2 < x \leq -1 \qquad \text{vagy} \qquad 1 \leq x < 2$$

I. eset $-2 < x < -1$.
Ekkor a bal oldalra

$$|x| - 1 = -x - 1$$

a jobb oldalra

$$\{x\} = x + 2$$

és az egyenlet megoldása

$$\begin{aligned} |x| - 1 &= \{x\} \\ -x - 1 &= x + 2 \\ -3 &= 2x \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

II. eset $x = -1$.
Ekkor a bal oldal

$$|-1| - 1 = 0$$

a jobb oldal

$$\{-1\} = 0$$

Tehát ez jó megoldás.

III. eset $1 \leq x < 2$.
Ekkor a bal oldalra

$$|x| - 1 = x - 1$$

a jobb oldalra

$$\{x\} = x - 1$$

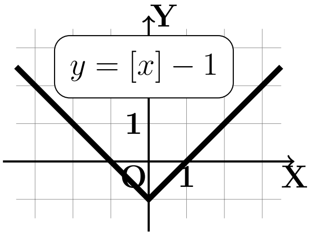
és az egyenlet megoldása

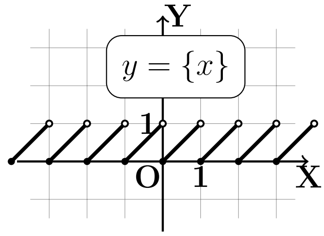
$$|x| - 1 = \{x\}$$

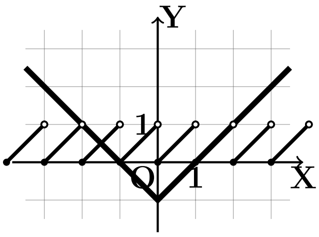
$$x - 1 = x - 1$$

Ami azonosság.

Összefoglalva: $x = -\dfrac{3}{2}$ vagy $x = -1$ vagy $1 \leq x < 2$.







64. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$[x] + |x| = \{x\}$$

Megoldás

Az egészrész definícióját használva alakítsuk át az egyenletünket

$$\begin{aligned} [x] + |x| &= \{x\} \\ x - \{x\} + |x| &= \{x\} \\ x + |x| &= 2\{x\} \end{aligned}$$

I. eset: $x < 0$
A bal oldal azonosan 0 ($x + |x| = x + (-x) = 0$), a jobb oldal nullánál nem kisebb. Egyenlőség csak akkor, ha mind a két oldal nulla, ekkor

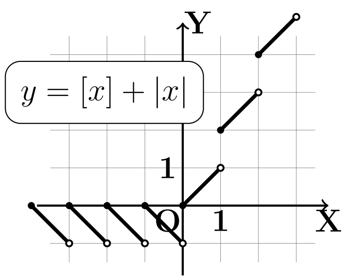
$$x \in \mathbb{Z}^-$$

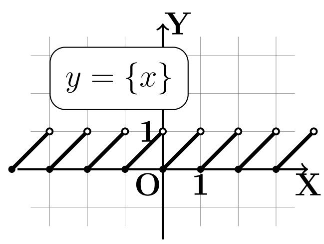
II. eset: $0 \leq x$
A bal oldal $1 \leq x$ esetén kettőnél nagyobb, tehát ha van megoldás, akkor csak a $0 \leq x < 1$ intervallumon lehet. Ekkor az eredeti egyenlet

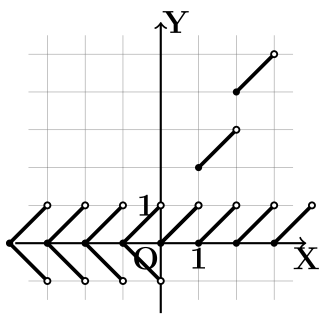
$$\begin{aligned} [x] + |x| &= \{x\} \\ 0 + x &= x \end{aligned}$$

azonosságot kapjuk.

Összefoglalva: $x \in \mathbb{Z}^-$ vagy $0 \leq x1$







65. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán*

$$\begin{cases} x + 2[y] = 5 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$$

Megoldás

Szorozzuk meg az első egyenletet hárommal, majd vonjuk ki belőle a második egyenletet

$$\begin{cases} 3x + 6[y] = 15 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 6[y] + 5y = 13$$

Használjuk a definíciót

$$\begin{aligned} 6[y] + 5y &= 13 \\ 6[y] + 5([y] + \{y\}) &= 13 \\ 11[y] + 5\{y\} &= 13 \end{aligned}$$

Ismét használjuk fel a törtrész definícióját

$$\begin{aligned} 0 \leq &\{y\} < 1 \\ 0 \leq &5\{y\} < 5 \\ 11[y] = &13 - 5\{y\} \\ 8 < &11[y] \leq 13 \end{aligned}$$

Itt $11[y]$ egy tizeneggyel osztható egész szám, ami csak 11 lehet, tehát:

$$\begin{cases} 11[y] = 11 \\ 5\{y\} = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} [y] = 1 \\ \{y\} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$y = [y] + \{y\} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

Ekkor $x = 3$.

2. megoldás

Nézzük a feladatot

$$\begin{cases} x + 2[y] = 5 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$$

Fejezzük ki mind a két egyenletből y-t

$$\begin{cases} x + 2[y] = 5 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} [y] = \dfrac{5-x}{2} \\ y = \frac{3x-2}{5} \end{cases}$$

$$\left[\frac{3x-2}{5}\right] = \frac{5-x}{2}$$

Itt a jobb oldal egész szám, azaz létezik olyan $n \in Z$, melyre

$$\begin{cases} \dfrac{5-x}{2} = n \\ \left[\dfrac{3x-2}{5}\right] = n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 5 - 2n \\ n \leq \dfrac{3x-2}{5} < n + 1 \end{cases}$$

Azaz

$$\begin{aligned}
n \leq& \frac{3\,(5-2n)-2}{5} < n+1 \\
n \leq& \frac{15-6n-2}{5} < n+1 \\
n \leq& \frac{13-6n}{5} < n+1 \\
5n \leq& 13-6n < 5n+5 \\
11n \leq& 13 < 11n+5 \\
\frac{8}{11} <& n \leq \frac{13}{11}
\end{aligned}$$

A kapott intervallumban csak egy egész szám van, ekkor

$$n=1 \quad \Rightarrow \quad x=3;\;\; y=\frac{7}{5}$$

66. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán*

$$\begin{cases} [x+2y]=4 \\ 3x-5y=1 \end{cases}$$

Megoldás

Az első egyenlet szerint

$$[x+2y]=4$$
$$4 \leq x+2y < 5$$

Legyen $4 \leq p < 5$; $p \in R$ és

$$\begin{cases} [x+2y]=4 \\ 3x-5y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=p \\ 3x-5y=2 \end{cases}$$

Ez utóbbit megoldva

$$\begin{cases} x+2y=p \\ 3x-5y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+6y=3p \\ 3x-5y=2 \end{cases}$$

A megoldás

$$\begin{cases} x=\dfrac{5p+4}{11} \\ y=\dfrac{3p-2}{11} \end{cases} \qquad 4 \leq p < 5;\ p \in \mathbb{R}$$

67. *Határozza meg azokat az x, y, z valós számokat, amelyek megoldásai az alábbi egyenletrendszernek:*

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 3{,}4 \\ [x] + \{y\} + z = 4{,}5 \\ \{x\} + y + [z] = 5{,}3 \end{cases}$$

Arany Dániel 2013/2014, Kezdők Döntő forduló 1. feladat

Megoldás

A három egyenletet összeadva kapjuk

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 2z &= 13{,}2 \\ x + y + z &= 6{,}6 \end{aligned}$$

Ebből az első egyenletet kivonva

$$\begin{aligned} (x + y + z) - (x + [y] + \{z\}) &= 3{,}2 \\ x + y + z - x - [y] - \{z\} &= 3{,}2 \\ y - [y] + z - \{z\} &= 3{,}2 \\ \{y\} + [z] &= 3{,}2 \end{aligned}$$

A definíciót használva adódik

$$\{y\} = 0{,}2; \qquad [z] = 3$$

a lépéseket a második egyenlettel elvégez kapjuk

$$\{x\} = 0{,}1; \qquad [y] = 2$$

majd a harmadik egyenlettel is elvégezve

$$\{z\} = 0{,}3; \qquad [x] = 1$$

Ezek felhasználásával a megoldások

$$\begin{aligned} x &= [x] + \{x\} = 1{,}1 \\ y &= [y] + \{y\} = 2{,}2 \\ z &= [z] + \{z\} = 3{,}3 \end{aligned}$$

Az ellenőrzés a kapott megoldást jónak találja.

Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló
Általános Iskola és Gimnázium

2025. január 14 – 15.