Poliéderek, síkgráfok, algoritmusok

A kőszegi matematika tanártovábbképzésen **7. osztályt végzett diákokkal** dolgozhattam együtt. A közös munkában a címben szereplő témák egyes fejezeteit igyekeztünk összekapcsolni. Az alábbiakban a megbeszélt, a kitűzött és a kitűzésre szánt feladatokról, illetve megoldásaikról lesz szó.

Ebben az összefoglaló cikkben célszerűnek tűnt a lehetőség szerinti tematikus tárgyalás.

A foglalkozásokon ettől a csoportosítástól eltérő sorrendben beszéltük meg a feladatokat. Ennek két oka volt. Egyrészt úgy gondoltam, az egyszerre kitűzött, egyazon témakörön belüli nagyszámú probléma nem túl változatos, esetleg unalmassá is válhat; másrészt egy-egy fejezet gondolatkörét szerencsésebbnek tartottam több alkalommal, ismételten tárgyalni, hogy a fontosabb gondolatok érlelődésére több idő jusson.

1. Kombinatorikai alapozás

Amikor először találkoztam a csoporttal, kíváncsi voltam, mennyire képzettek a gyerekek, mennyire egységes a tudásuk. A többség – de nem mindenki – találkozott már a Gauss-módszerrel, a szita-formulával és az $\binom{n}{k}$ fogalmával. Az alábbi feladatok a szintrehozás célját szolgálják.

1.1. feladat: Tekintsük az alábbi táblázatot! Milyen szám áll a 2001. sor 100. helyén? (A 2001. sorban 2001 darab szám van.)

```
            1
          2   3
        4   5   6
      7   8   9  10
    11  12  13  14  15 stb.
```

Megoldás: Az első 2000 sorban 1 + 2 + 3 + ... + 2000 darab szám van. A Gauss-módszerrel $1 + 2 + 3 + ... + 2000 = \frac{2000 \cdot 2001}{2} = 2001000$. Így a 2001. sor kezdőszáma 2 001 001, a 100. helyen a 2 001 100 szám található.

Megjegyzés: Megválaszolhatjuk a fordított irányú kérdést is, pl.: „Melyik sorban, hányadik helyen található a 2001?”

Válasz: Ha az n. sorban található a 2001, akkor az első $(n – 1)$ sorban $1 + 2 + ... + (n – 1) = \frac{(n-1)n}{2}$ szám áll. Némi próbálkozás után láthatjuk, hogy az $\frac{(n-1)n}{2} < 2001$, vagyis $(n – 1)n < 4002$ egyenlőtlenség $n = 63$-ra még teljesül, de $n = 64$-re már nem. Az első 62 sorban $\frac{62 \cdot 63}{2} = 1953$ darab szám van, így a 63. sor 1954-gyel kezdődik, és ezen sor 48. tagja a 2001.

1.2. feladat: Tekintsük az alábbi táblázatot! Milyen számpár áll a 30. sor 20. helyén?

```
                    (0,0)
              (1,0)    (0,1)
         (2,0)    (1,1)    (0,2)
    (3,0)    (2,1)    (1,2)    (0,3) stb.
```

Megoldás: Észrevehetjük, hogy az első sorban a számpár két tagjának összege 0; a második sorban az összeg 1; a harmadik sorban 2 stb. A tulajdonság öröklődik: az új sorban az első számpár két tagjának összege eggyel nagyobb, mint a felette lévő sorban, és az összeg soron belül állandó marad. Tehát az n. sorban a számpárok összege $(n-1)$.

Így a 30. sor első számpárja (29, 0), a 20. helyen a (10, 19) számpár található.

Megjegyzés: Ez a két feladat a Gauss-összegzés ismétlése mellett előkészíti a Bolha-problémakör nehéz 3.11. feladatát is. Arra is alkalmasak a feladatok, hogy a végtelen fogalmával kapcsolatban (pl. racionális számok és természetes számok) problémákat vessünk fel.

A következő 1.3 – 1.8. rövid feladatok az $\binom{n}{k}$ fogalmát készítik elő.

1.3. feladat: Hány 5-jegyű számot készíthetünk az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, ha
a) minden számjegyet csak egyszer használhatunk fel;
b) egy számjegyet többször is felhasználhatunk?

Megoldás: a) Az 5-jegyű szám első számjegye 5-féle lehet, a második már csak 4-féle (egy számjegyet már felhasználtunk), a harmadik 3-féle stb. A maradék számjegyek bármelyikét a többitől függetlenül felhasználhatjuk, így $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 5!$-féle szám készíthető.

b) Az első számjegy 5-féle lehet, a második szintén 5-féle stb. 5^5 darab ilyen szám van.

1.4. feladat: Hány 5-jegyű számot készíthetünk a 0, 1, 2, 3 számjegyekből?

Első megoldás: Egy számjegyet többször is felhasználhatunk. Az első számjegy 3-féle lehet (0 nem), a többi négyféle. A válasz $3\cdot4^4$.

Második megoldás (komplementer-módszer: jó = összes – rossz): Az összes *legfeljebb* 5-jegyű szám száma 4^5 (úgy is felfoghatjuk, hogy itt 0 is lehet első számjegy). Ebből nem 5-jegyűek azok, amelyek első számjegye 0. Ezen „számokban” az első nulla számjegy kötött, a többi 4-féle lehet; ilyen szám 4^4 van. Az 5-jegyű számokból 4^5-4^4 darab van.

1.5. feladat: Hány 5-jegyű számot készíthetünk az 1, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegyet egyszer használhatunk fel?

Megoldás: Különböztessük meg a két 1-est, pl. $1a$ és $1b$ jelöléssel!

Ha a két 1-es különbözne, akkor 5!-féle számot készíthetnénk. De ekkor minden 5-jegyű számot kétszer számoltunk (pl. $\overline{3b42a}$ ugyanaz, mint $\overline{3a42b}$), ezért $\frac{5!}{2}=60$-féle szám készíthető.

1.6. feladat: Hány 6-jegyű számot készíthetünk az 1, 1, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegyet egyszer használhatunk fel?

Megoldás: Az előző gondolatmenetet itt is alkalmazhatjuk. A 3 darab 1-est $1a$, $1b$, $1c$ módon megkülönböztetve 6!-féle számot készíthetnénk. Ekkor egyes számok egybeesnek, pl. a $\overline{b2c43a}$ számot annyiszor számoltuk, ahányféleképpen az a, b, c számjegyek egymás között cserélgethetők: $\overline{a2c43b}$, $\overline{a2b43c}$ stb. Három különböző számjegy 3!-féle sorrendbe írható, így $\frac{6!}{3!} = 120$ a keresett számok száma.

1.7. feladat: Hány 7-jegyű számot készíthetünk az 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegyet egyszer használhatunk fel?

Megoldás: Az előzőek alapján a 7! összes lehetséges sorrendet osztani kell a három 1-es miatt 3!-sal, a két 2-es miatt 2!-sal: $\frac{7!}{3!\cdot 2!} = 420$.

1.8. feladat: Hányféleképpen lehet kiolvasni az alábbi táblázatból az EZNEHÉZKIOLVASÁS szót? (Az olvasás folyamán a bal felső sarokból indulunk, csak jobbra és lefelé lehet haladni.)

E	Z	N	E	H	É	Z	K	I	O	L	V
Z	N	E	H	É	Z	K	I	O	L	V	A
N	E	H	É	Z	K	I	O	L	V	A	S
E	H	É	Z	K	I	O	L	V	A	S	Á
H	É	Z	K	I	O	L	V	A	S	Á	S

Első megoldás: Az EZNEHÉZKIOLVASÁS szó kiolvasásakor a táblázatban E és S között teszünk meg egy utat. Az első sor és első oszlop mezőin egy út halad át, ezekre egyféleképpen léphetünk. Ezután a fennmaradt mezőkre vezető utak számát úgy számolhatjuk ki, hogy a felette és balra mellette lévő mezőkbe vezető utak számát összeadjuk (hiszen *vagy* balról, *vagy* felülről érkezünk mindegyik mezőre, és a kétféle út független egymástól).

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	...						
1	3	6	10	15	...						
1	4	10	20	35	...						
1	5	15	35	70	...						

Technikailag az első sor és első oszlop mezőibe vezető utak számát beírjuk a megfelelő mezőkbe (ez csupa 1-eseket jelent), majd a fent leírt szabállyal soronként balról jobbra haladva rendre kitölthetjük a táblázat mezőit. A jobb alsó mezőbe kerülő szám megadja az összes út, s így az összes kiolvasás számát.

Második megoldás: Minden egyes kiolvasáskor 11 lépést teszünk jobbra és 4 lépést lefelé. A jobbra irányuló lépéseket J, a lefelé történő lépéseket L betűvel jelölve egy 15 betűs kódot kapunk. A kiolvasások és kódok között kölcsönösen egyértelmű a megfeleltetés:

annyiféle kiolvasás van, ahány szó készíthető 11 darab J és 4 darab L betűből. Az 5. feladat alapján ilyen szó $\frac{15!}{11!\cdot 4!}$ van.

Harmadik megoldás: Minden egyes kiolvasáskor 15 lépést teszünk. Ha megmondjuk, ebből a 15-ből melyik 4 lépést tesszük meg lefelé, akkor az egész bejárást megadtuk. Tehát annyi kiolvasás lehetséges, ahányféleképpen 15 lépésből 4-et kiválaszthatunk úgy, hogy a kiválasztott lépések sorrendje nem számít. (Egy példa, hogy miért nem számít a kiválasztás sorrendje: ha pl. a négy lefelé történő lépés a 4., 7., 3., 2., akkor ugyanazt a kiolvasást kapjuk, mint ha a négy lefelé lépés a 2., 3., 4., 7. lenne stb.) Az így kapott szám jelölése: $\binom{15}{4}$, olvasd: „15 alatt a 4”, s ennek kiszámolását fentebb láttuk: $\frac{15!}{11!\cdot 4!}$.

Megjegyzés: Ha a lefelé történő lépések helyett a jobbra lépéseket választjuk ki, akkor a hasonló gondolatmenet eredménye $\binom{15}{11} = \frac{15!}{11!\cdot 4!}$, ugyanazt az eredményt kapjuk.

1.9. feladat: Értelmezzük az $\binom{n}{k}$ fogalmát!

Megjegyzés: Általánosan megfogalmazva: ha *n* különböző objektumból *k* darabot kiválasztunk úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje közömbös, ezt $\binom{n}{k}$-féleképpen tehetjük meg. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

A fenti 1.8. megjegyzésben láttuk, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; ez a logikai párosításból vagy az algebrai formulából is következik.

Végül megjegyezhetjük, hogy $\binom{n}{0}$-t célszerű 1-nek definiálnunk.

A következő 1.10 – 1.15. feladatok az $\binom{n}{k}$ fogalmát gyakoroltatják.

1.10. feladat: Hány egyenes megy át 10 olyan ponton, melyek közül 4 egy egyenesre illeszkedik, de ezeken kívül semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre?

Első megoldás: A 6 általános helyzetű pont közül bármely kettő meghatároz egy egyenest, ezek száma $\binom{6}{2} = 15$. A 6 pont bármelyikét összeköthetjük a maradék 4 pont bármelyikével, ekkor $6\cdot 4 = 24$ egyenest kapunk. Végül a 4 kollineáris pont is meghatároz egy egyenest, így összesen $15 + 24 + 1 = 40$ egyenest kapunk.

Második megoldás (jó = összes – rossz): 10 általános helyzetű pontra $\binom{10}{2} = 45$ egyenes illeszthető. A 4 egy egyenesen lévő pont miatt $\binom{4}{2} = 6$ egyenes egybeesik, így $45 - 6 + 1 = 40$ egyenest kapunk.

1.11. feladat: Adott a síkon két párhuzamos egyenes, az egyiken 6, a másikon 4 darab pont. Hány háromszöget határoznak meg a pontok?

Első megoldás: Háromszöget úgy kapunk, ha valamelyik egyenesről kettő, a másikról pedig egy pontot választunk ki. $\binom{6}{2}$, ill. $\binom{4}{2}$-féleképpen tudjuk a 2-2 pontot kiválasztani, az összes háromszög száma $\binom{6}{2} \cdot 4 + \binom{4}{2} \cdot 6 = 60 + 36 = 96$.

Második megoldás (jó = összes – rossz): 10 általános helyzetű pontra $\binom{10}{3} = 120$ háromszög illeszkedik. Az egy egyenesre illeszkedő 4 és 6 pont miatt nem kapunk valódi háromszöget $\binom{6}{3} = 20$, ill. $\binom{4}{3} = 4$ esetben. Az összes háromszög száma $120 - 20 - 4 = 96$.

1.12. feladat: Oldjuk megaz előző feladatot három párhuzamos egyenessel, rajtuk rendre 4, 6, 8 ponttal!

Megoldás: Ez, kedves olvasó, házi feladat.

1.13. feladat: Hányféleképpen lehet kiolvasni a 6. feladat táblázatából az EZNEHÉZKIOLVASÁS szót, ha a 2. sor 6. betűje nem szerepelhet a kiolvasásban?

Megoldás (jó = összes – rossz): A 6. feladat folytatásában alkalmazhatnánk az ottani első megoldásban leírt leszámolási technikát, ez nem okozna nehézséget. A következő feladat miatt most mégis inkább a komplementer módszerhez folyamodunk.

Rendre meghatározzuk a kezdő (E), tiltott (Z) és befejező (S) mezőkön áthaladó utak számát. Jelöljük az X és Y mező közötti utak számát $\overline{XY}$ -nal, ekkor $\overline{ES} = \binom{15}{4}$ a 6. feladat megoldása alapján. Hasonlóan $\overline{EZ} = \binom{6}{1}$, $\overline{ZS} = \binom{9}{3}$. Tiltottak azok az $\overline{EZS}$ utak, amelyek mindhárom mezőn áthaladnak. Ezek száma $\binom{6}{1} \cdot \binom{9}{3}$, így a megengedett kiolvasások száma $\binom{15}{4} - \binom{6}{1} \cdot \binom{9}{3}$.

1.14. feladat: Oldjuk meg az előző feladatot, ha a 2. sor 6. betűje és a 4. sor 9. betűje nem szerepelhet a kiolvasásban.

Megoldás (szita-formula): A 4. sor 9. betűje V. $\overline{\text{EV}} = \binom{11}{3}$, $\overline{\text{VS}} = \binom{4}{1}$. A V tiltott mezőn áthaladó $\overline{\text{EVS}}$ utak száma $\binom{11}{3}\cdot\binom{4}{1}$. Az előző megoldásból tudjuk, hogy $\overline{\text{EZS}} = \binom{6}{1}\cdot\binom{9}{3}$. Ha az összes kiolvasásból levonjuk a V, majd a Z tiltott mezőkön áthaladó utak számát, kétszer vonjuk le azokat, amelyek mindkét mezőn áthaladnak. Ezek száma: $\overline{\text{EZVS}} = \binom{6}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}$, így a megengedett kiolvasások száma $\binom{15}{4} - \binom{6}{1}\cdot\binom{9}{3} - \binom{11}{3}\cdot\binom{4}{1} + \binom{6}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}$.

1.15. feladat: Hányféleképpen lehet kiolvasni a 6. feladat táblázatából az EZNEHÉZKIOLVASÁS szót, ha nem szabad egymás után kétszer lefelé lépni?

Megoldás: Térjünk vissza a kódolásos megoldásunkhoz! A feladat annak meghatározása, hogy 11 darab J és 4 darab L betűből hányféleképpen tudunk olyan szót készíteni, amelyben nincs egymás mellett két L betű.

A 11 J betű 12 betűközt határoz meg (a szó eleje és vége is számít). Ebből a 12 helyből kell 4-et kiválasztanunk az L betűk számára úgy, hogy egy helyet csak egyszer választhatunk, különben egymás mellé kerülne két L betű. Az összes lehetőség $\binom{12}{4}$.

1.16. feladat: Hányféleképpen lehet 5 különböző színű golyóból karkötőt készíteni? (Nem számít különbözőnek két karkötő, ha forgatással egymásba vihető.)

Első megoldás: A feladat valójában az 5-elemű „körök” számára kérdez rá. A golyókból 5-hosszú sorozatot 5!-féleképpen készíthetnénk, de az ötödrendű forgásszimmetria miatt minden karkötőt 5-ször számoltunk. (Ha a színeket 1, 2, 3, 4, 5 számokkal jelöljük, akkor pl. az 12345, 23451, 34512, 45123, 51234 sorozatok ugyanazt a „kört” adják.) Így $\frac{5!}{5} = 4!$ a karkötők száma.

Második megoldás: Az egyik golyót kiválasztva megszakítjuk a kört. A többi négy golyót – a kiválasztott golyóhoz képest – már csak sorba kell rendeznünk. Ezt 4!-féleképpen tehetjük meg.

Megjegyzés: Az első megoldás előkészíti a térgeometria témakör színezéses-feladatait. (2.15 – 2.19. feladatok.)

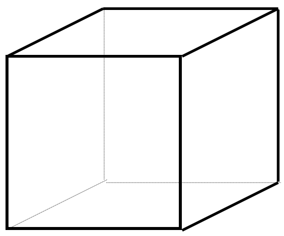
2. Térgeometria feladatok (konstrukció, Euler tétele)

2.1. feladat: A POLYDRON készlet segítségével építsünk négyzetekből szabályos poliédert!

Megoldás: Szabályos test minden lapja egybevágó szabályos sokszög, és minden csúcsába ugyanannyi lap fut be.

Ha négyzetekből építjük fel a szabályos testet, akkor a csúcsokban három négyzetlap fog találkozni. Kevesebb nem lehet, hiszen minden poliéder csúcsaiba legalább három lapnak kell befutnia; ha pedig négy négyzet találkozna, akkor a négy közös csúcsú derékszög síkot feszít ki, nem tudjuk a testépítést folytatni.

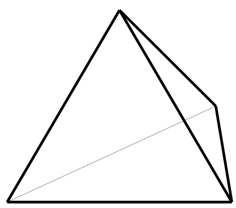
Három, egymásra kölcsönösen merőleges négyzetlap által meghatározott térnyolcadot három másik lap egyértelműen zár le, így egyetlen négyzetekkel határolt szabályos testet kapunk. A hatlapú test a kocka.



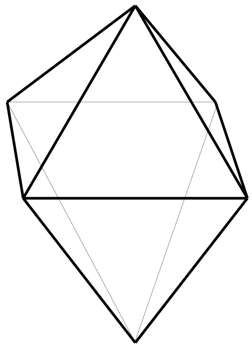
2.2. feladat: A POLYDRON készlet segítségével építsünk háromszögekből szabályos poliédert!

Megoldás: A szabályos háromszögek belső szöge 60°, így a szabályos test egy csúcsában három, négy vagy öt háromszöglap találkozhat; hat háromszöglap már kifeszítené a síkot.

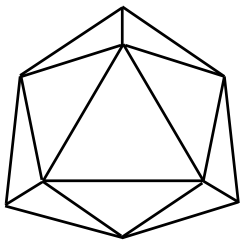
I. eset (minden csúcsban három lap találkozik): Ekkor az egy csúcsban találkozó három lap egyértelműen zárható le egy negyedik lappal. A kapott négylapú szabályos test a tetraéder ('tetra': görög eredetű szó, jelentése 'négy').



II. eset (minden csúcsban négy lap találkozik): Az egy csúcsból kiinduló négy lap alapélei négyzetet határoznak meg. Erre tükrösen helyezkedik el a másik négy lap. A nyolc háromszögből álló test az oktaéder. ('Okta' jelentése 'nyolc.)



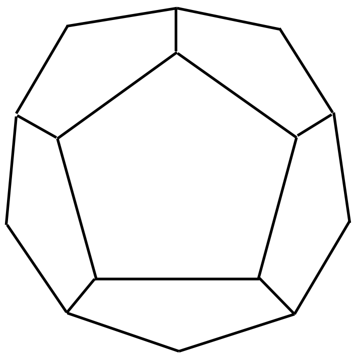
III. eset (minden csúcsban öt lap találkozik): A készlet segítségével ilyen testet is konstruálhatunk. A poliédernek 20 lapja van, ezért a neve ikozaéder. ('Ikozi': a. m. 'húsz'.)



2.3. feladat: A POLYDRON készlet segítségével építsünk ötszögekből szabályos poliédert!

Megoldás: A szabályos ötszög egy belső szöge $\frac{3 \cdot 180°}{5} = 108°$. Három lap találkozhat egy csúcsban, de négy már nem.

Mint az eddigiek folyamán, az első csúcsból kiinduló három lap rögzítése után ezúttal is egyértelműen folytatható a test konstruálása. 12 darab ötszöglapból álló testet kapunk, neve dodekaéder. ('Dodeka': a. m. 'tizenkettő'.)



2.4. feladat: Hány szabályos test van?

Megoldás: A fenti feladatokban öt szabályos testet konstruáltunk meg.

Több nincs: a szabályos hatszög egy belső szöge 120°, ezért ha három lapot csatlakoztatunk egy közös csúcshoz, merev síkot kapunk; ha pedig hatnál nagyobb oldalszámú szabályos sokszögeket tekintünk, ezek belső szögei 120°-nál nagyobbak, nem tudunk hármat egy csúcshoz illeszteni.

2.5. feladat: Hány csúcsa, éle, lapja van az öt szabályos testnek?

Megoldás: A felépített testeket kézbe vehetjük, jellemzőiket egyszerűen megszámolhatjuk. Az alábbi táblázat mutatja a számolások eredményét.

	kocka	tetraéder	oktaéder	ikozaéder	dodekaéder
csúcs	8	4	6	12	20
lap	6	4	8	20	12
él	12	6	12	30	30

2.6. feladat: Észrevehető valamilyen szabályszerűség a táblázatba írt értékek között?

Megoldás: A gyerekek megtalálták a „csúcs + lap = él + 2” összefüggést. Felvetődött a kérdés: ez a formula csak szabályos testekre igaz vagy bármely testre?

2.7. feladat: Gyakoroljuk a „többirányú leszámolás” módszerét!

Megoldás: Itt arról van szó, hogy a szabályos testek esetében a csúcs, él, lap alapjellemzők közül bármelyik segítségével a másik kettő meghatározható (feltéve, hogy rendelkezünk pl. azzal az ismerettel, hogy egy csúcsban hány lap találkozik). Konkrét példa:

a) Határozzuk meg a kocka éleinek számát, ha tudjuk, hogy a lapok száma 6!

Megoldás: 1 laphoz 4 él tartozik, mert a lapok négyzetek.
6 laphoz $6 \cdot 4 = 24$ él tartozik.

Mivel mindegyik élt 2-szer számoltuk a két határoló lap miatt, az élek száma $\frac{24}{2} = 12$.

Megjegyzés: Az 5 testnek 3 jellemzője van, s ezek bármelyikét 2 másik segítségével számolhatjuk ki. Valójában tehát $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ feladatról van szó. Több foglalkozáson elővettük a gondolatot és ismételten megcsináltunk néhány újabbat a 30 feladat közül. (Nagy segítséget jelentett, hogy a testek kézbe vehetők voltak.)

Néhány további példa:

b) Határozzuk meg az ikozaéder csúcsainak számát, ha tudjuk, hogy a lapok száma 20!

1 laphoz 3 csúcs tartozik, mert a lapok háromszögek.
20 laphoz $20 \cdot 3 = 60$ csúcs tartozik.

Mivel minden csúcsot 5-ször számoltunk az 5 határoló lap miatt, az élek száma $\frac{60}{5} = 12$.

c) Határozzuk meg az oktaéder lapjainak számát, ha tudjuk, hogy az élek száma 12!

1 élhez 2 lap tartozik.
12 élhez $12 \cdot 2 = 24$ lap tartozik.

Minden lapot 3-szor számoltunk, mert a lapok háromszögek. Ezért a lapok száma $\frac{24}{3} = 8$.

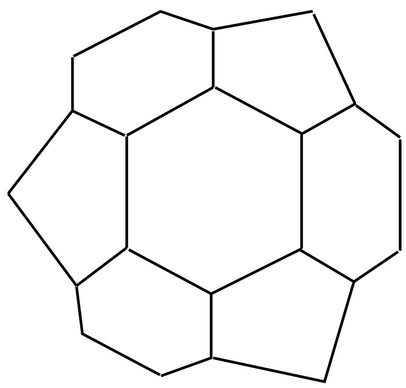
d) Határozzuk meg a dodekaéder éleinek számát, ha tudjuk, hogy a csúcsok száma 20!

1 csúcshoz 3 él tartozik, mert egy csúcsban három lap találkozik.
20 csúcshoz $20 \cdot 3 = 60$ él tartozik.

Mivel minden élt 2-szer számoltunk a két végén levő csúcs miatt, az élek száma $\frac{60}{2} = 30$.

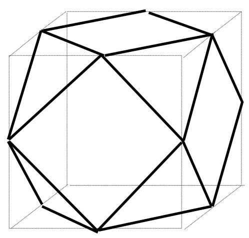
2.8. feladat: Építsük fel a focilabda poliéder-megfelelőjét!

Megoldás: A focilabda öt- és hatszögekből áll. Minden ötszöghöz 5 darab hatszöglap csatlakozik, minden hatszöghöz felváltva 3-3 ötszög- és hatszöglap. Ez alapján a test egy részábrája:

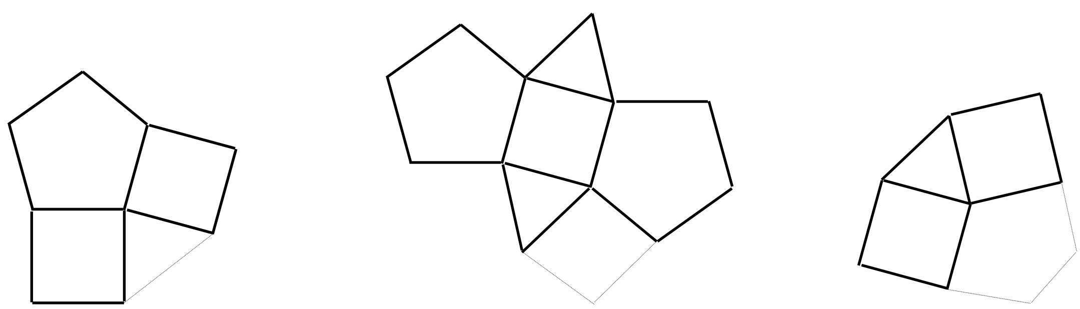


2.9. feladat: Konstruáljunk további testeket!

Megoldás: A későbbiekben két további testtel kapcsolatban több feladatot is megoldunk. Az egyik a szabályos háromszögekből és négyzetekből álló „csonkolt kocka". Ezt úgy képzelhetjük el, hogy a kocka 8 csúcsánál rendre levágunk egy-egy szabályos háromszöget, figyelve arra, hogy a metsző sík a csúcsba befutó 3 él felezőpontján menjen át (ábra).



A másik test szabályos háromszögekből, négyzetekből és szabályos ötszögekből áll. Hálózatának egyes részleteit az alábbi ábrák mutatják. (Minden csúcsban két négyzet és egy-egy háromszöglap, valamint ötszöglap találkozik; egy ötszöglaphoz élben négyzetek csatlakoznak; egy négyzetlaphoz élben két-két szemközti háromszöglap és ötszöglap csatlakozik; végül egy háromszöglaphoz élben négyzetek csatlakoznak.)



Javasoljuk az Olvasónak, hogy a testet önállóan is készítse el, így a későbbi feladatmegoldásokhoz „kézzelfogható” segítséget fog kapni. A testet nevezzük L_{62}-nek (később látjuk majd, hogy éppen 62 lapja van).

2.10. feladat: Térjünk vissza a 2.6. feladatban észrevett „csúcs + lap = él + 2” összefüggésre! Igaz-e az összefüggés nem-szabályos testekre is?

Megoldás: A csonkolt kocka és a focilabda poliéderének jellemzőit az alábbi táblázatban adjuk meg:

	csonkolt kocka	focilabda
csúcs	12	60
lap	14	32
él	24	90

Úgy tűnik, hogy a „csúcs + lap = él + 2” összefüggés most is igaz, bár a focilabda jellemzőit elég nehéz volt megszámolni. (Az L_{62} poliéder esetében nem is engedtem elvégezni a manuális számolást.)

2.11. feladat: Bizonyítsuk be a megsejtett „csúcs + lap = él + 2” formulát! Ez az összefüggés Euler-tétele.

Megoldás: Lásd a Gráfok témakör 4.3. feladatát.

2.12. feladat: Határozzuk meg a focilabda-poliéder csúcs, lap, él jellemzőit Euler-tétele segítségével!

Megoldás: Jelöljük a focilabda-poliéder ötszöglapjainak számát x-szel, és határozzuk meg a hatszöglapok számát az ötszöglapok segítségével!

1 ötszöglaphoz 5 hatszöglap tartozik.

x ötszöglaphoz $5 \cdot x$ hatszöglap tartozik.

Minden hatszöglapot háromszor számoltunk, mert egy hatszöglaphoz 3 ötszöglap illeszkedik. Ezért a hatszöglapok száma $\frac{5x}{3}$, a lapok száma $x + \frac{5x}{3}$.

A kétfajta laphoz $5x + 6 \cdot \frac{5x}{3} = 15x$ csúcs tartozik, de minden csúcsot 3-szor számoltunk, mert minden csúcsban három lap találkozik. Így a csúcsok száma $\frac{15x}{3} = 5x$.

Az élek száma hasonlóan határozható meg. $5x + 6 \cdot \frac{5x}{3} = 15x$ az összes (többszörösen számolt) él; mindegyiket 2-szer számoltuk, így az élek száma $\frac{15x}{2}$.

Most már felírhatjuk Euler-tételét: $5x + x + \frac{5x}{3} = \frac{15x}{2} + 2$. Az egyenlet megoldása $x = 12$. Összehasonlítva a kapott értékeket a 2.10. feladat táblázatával, láthatjuk, hogy manuálisan is jól számoltunk.

Megjegyzés: Eljárhatunk ügyesebben is. Pl. észrevehetjük, hogy a focilabda-poliéder minden csúcsa pontosan egy ötszöghöz tartozik, így egy lépésben kijön $5x$ a csúcsok számára.

2.13. feladat: Határozzuk meg az L_{62}-poliéder csúcs, lap, él jellemzőit Euler-tétele segítségével!

Megoldás: Jelöljük pl. az ötszöglapok számát x-szel. A négyzetlapok száma ekkor $\frac{5x}{2}$ (egy ötszöglaphoz öt négyzet tartozik, és minden négyzetlapot kétszer számoltunk); a háromszöglapok száma hasonlóan $\frac{5x}{3}$; tehát a lapok száma $x + \frac{5x}{2} + \frac{5x}{3} = \frac{31x}{6}$.

A csúcsokkal szerencsénk van, mert minden csúcs pontosan egy ötszöghöz tartozik. A csúcsok száma $5x$.

Az élek száma ismét könnyen meghatározható, mivel minden él pontosan egy négyzethez tartozik. Az élek száma tehát $4 \cdot \frac{5x}{2} = 10x$.

Euler tételéből $5x + \frac{31x}{6} = 10x + 2$, innen $x = 12$.

Tehát az L_{62}-poliéder jellemzői:

ötszöglap	négyzetlap	háromszöglap	csúcs	él
12	30	20	60	120

2.14. feladat: Mutassuk meg Euler tétele segítségével, hogy pontosan öt szabályos test van!

Megoldás: Mindegyik esetben a lapok számát jelöljük x-szel.

I. eset: A szabályos test minden csúcsában három háromszöglap találkozik.

A csúcsok száma $\frac{3x}{3} = x$, az élek száma $\frac{3x}{2}$. Euler tételéből $x + x = \frac{3x}{2} + 2$, az egyenlet megoldása $x = 4$. A csúcsok száma 4, az élek száma 6. A tetraédert kaptuk.

II. eset: A szabályos test minden csúcsában négy háromszöglap találkozik.

A csúcsok száma $\frac{3x}{4}$, az élek száma $\frac{3x}{2}$. Euler tételéből $\frac{3x}{4} + x = \frac{3x}{2} + 2$, az egyenlet megoldása $x = 8$. A csúcsok száma 6, az élek száma 12. Az oktaédert kaptuk.

III. eset: A szabályos test minden csúcsában öt háromszöglap találkozik.

A csúcsok száma $\frac{3x}{5}$, az élek száma $\frac{3x}{2}$. Euler tételéből $\frac{3x}{5} + x = \frac{3x}{2} + 2$, az egyenlet megoldása $x = 20$. A csúcsok száma 12, az élek száma 30. Az ikozaédert kaptuk.

IV. eset: A szabályos test minden csúcsában három négyzetlap találkozik.

A csúcsok száma $\frac{4x}{3}$, az élek száma $\frac{4x}{2} = 2x$. Euler tételéből $\frac{4x}{3} + x = 2x + 2$, az egyenlet megoldása $x = 6$. A csúcsok száma 8, az élek száma 12. Ez a kocka.

V. eset: A szabályos test minden csúcsában három ötszöglap találkozik.

A csúcsok száma $\frac{5x}{3}$, az élek száma $\frac{5x}{2}$. Euler tételéből $\frac{5x}{3} + x = \frac{5x}{2} + 2$, az egyenlet megoldása $x = 12$. A csúcsok száma 20, az élek száma 30. Ez a dodekaéder.

Megjegyzés: Ez az egyszerű feladat zárja a térgeometriai Euler-tétel témakörét.

A szabályos testek keresése mellett feltétlenül érdemes a szabályos (síkbeli) mozaikok fajtáit is meghatározni. Ezt – és több kapcsolódó problémát – a csoport a párhuzamosan dolgozó tanárral, dr. Kiss Sándorral végezte el.

Színezés-témakör

2.15. feladat: Hányféleképpen színezhetjük ki egy kocka lapjait két színnel? (Mindkét színt fel kell használnunk.)

Megoldás: Nem tekintjük különbözőnek azokat a színezéseket, amelyek mozgatással egymásba vihetők (lehet pl. forgatni a kockát, de síkra tükrözni nem).

Legyen a két szín piros és kék.
Egy piros lappal csak egy kocka van.
Két piros lap lehet egymáshoz csatlakozó vagy szemközti, ilyen kocka kettő van.
Három piros lap kétféleképpen helyezkedhet el: vagy van két szemközti közöttük, vagy mindhárom egy csúcsban találkozik. Két kocka készíthető.
A négy piros lappal rendelkező kockák számát legegyszerűbben a szimmetriára való hivatkozással határozhatjuk meg. Négy piros lap esetén két kék lap van, tehát ezen kockák száma megegyezik a két piros lapú kockák számával: két kocka készíthető.
Öt piros lappal rendelkező kocka éppen annyi van, ahány egy piros lapú: egy darab.
Összesen 8 különböző kockát készíthetünk.

2.16. feladat: Hányféleképpen színezhetjük ki egy kocka lapjait hat színnel? (Mindegyik színt fel kell használnunk.)

Első megoldás: Jelöljük a színeket az 1, 2, ... , 6 számokkal.
A 2. szín lehet az első színű lappal szomszédos vagy szemköztes lapon.
Ha a két szín szemköztes lapot fest be, akkor a 3. szín a forgásszimmetria miatt csak egyféle helyzetben lehet, a maradék három szín helyzete 3!-féle lehet. Ebből az esetből 6-féle színezést kapunk.

Ha az 1. és 2. szín szomszédos lapon van, akkor a többi szín összesen 4!-féle színezést ad. Ebből az esetből 24-féle színezést kapunk.

Összesen tehát 30-féleképpen színezhetjük ki egy kocka lapjait hat színnel.

Második megoldás: Alkalmazzuk az 1.16. feladat gondolatmenetét!

Ha a kockát rögzítjük a térben, 6!-féle színezés lehetséges. Nem tekintjük azonban különbözőnek azokat a színezéseket, amelyek mozgatással (irányítástartó egybevágósági transzformációval) önmagukkal fedésbe hozhatók. Ezen mozgatások számával el kell osztanunk a 6!-t, hiszen minden egyes tényleges színezést ennyiszer számoltunk.

Induljunk ki egy adott színezésből! Ekkor pl. az 1-es színű lapot 6 oldalra fordíthatjuk, s az így kapott helyzetek mindegyikében ezen lap középpontja körül 4 forgást végezhetünk. Tehát $6 \cdot 4 = 24$ mozgatás viszi önmagába a kockát, ezért $\frac{6!}{24} = 30$ hatszínű, lényegesen különböző kocka van.

2.17. feladat: Hány mozgatás viszi önmagába az egyes szabályos testeket?

Megoldás: Az előző feladat megoldásának gondolatmenete teljesen általános, most is alkalmazható.

Ha a szabályos testnek L lapja és a lapoknak E éle van, a szimmetriatulajdonságok miatt bármely lapot L oldalra fordíthatjuk el, majd ezen lap körül E-féle forgatást végezhetünk (a helybenhagyást is számolva). Tehát a szabályos testet önmagával fedésbe hozó mozgatások száma $L \cdot E$. Az alábbi táblázat mutatja a megfelelő értékeket.

	kocka	tetraéder	oktaéder	ikozaéder	dodekaéder
lap	6	4	8	20	12
lapél	4	3	3	3	5
mozgatás	24	12	24	60	60
színezés	30	2	$\frac{8!}{8 \cdot 3}$	$\frac{20!}{20 \cdot 3}$	$\frac{12!}{12 \cdot 5}$

Megjegyzés: Megoldottuk azt a problémát is, hogy egy L lapú szabályos sokszög lapjait L színnel hányféleképpen lehet lényegesen különböző módon kiszínezni. (A táblázat utolsó sora mutatja az eredményeket.)

2.18. feladat: Hány mozgatás viszi önmagába a focilabda-poliédert és a csonkolt kockát?

Megoldás:

I. eset (csonkolt kocka):

A csonkolt kockának 6 négyzet- és 8 háromszöglapja van.

Pl. egy négyzetlapot 6 oldallapra fordíthatunk, s mindegyik esetben a lapközéppont körül 4 forgatást végezhetünk. A mozgatások száma $6 \cdot 4 = 24$.

Ha másik megoldásként a háromszöglapokat tekintjük, akkor egy adott lapot 8 helyre fordíthatunk, s mindegyik esetben 3 forgatást végezhetünk. A mozgatások száma most is $8 \cdot 3 = 24$.

II. eset (focilabda):

A focilabda-poliédernek 12 ötszög- és 20 hatszöglapja van.

Pl. egy ötszöglapot 12 oldallapra fordíthatunk, s mindegyik esetben a lapközéppont körül 5 forgatást végezhetünk. A mozgatások száma $12 \cdot 5 = 60$.

Ha másik megoldásként a hatszöglapokat tekintjük, akkor egy adott lapot 20 helyre fordíthatunk, s mindegyik esetben 6 forgatást végezhetünk. A mozgatások száma $20 \cdot 6 = 120$.

„Hogy kaphattunk más eredményt???" – kérdezték a diákok.

A hiba ott van, hogy a hatszöglapokhoz felváltva 3-3 ötszög-, ill. hatszöglap csatlakozik. Tehát egy hatszöglap 20 helyre fordítható, de itt csak 3 forgatást végezhetünk, hogy a test önmagával fedésbe kerüljön. A mozgatások száma $20 \cdot 3 = 60$, megkaptuk a megnyugtató eredményt.

Megjegyzés: Érdemes meghatározni a megfelelő színezések számát is.

2.19. feladat: Hányféleképpen színezhetjük ki az L_{62}-poliéder lapjait 62 színnel?

Megoldás: Házi feladatnak tűztem ki.

3. Algoritmusok, játékok

3.1. feladat: Jelöljük az előttünk tartott 3x3x3-as Rubik-kocka első lapját E, jobboldali lapját J betűkkel. Ekkor pl. a J1 forgatás azt jelöli, hogy a jobboldali lapon egyet fordítunk (90°) az óramutató járásával megegyező irányban; vagy pl. E3 az első lapon jelöl 3 fordítást stb. A rendezett kockával folyamatosan, felváltva E1 és J3 forgatásokat végzünk. Mit tapasztalunk?

Első megoldás (gyakorlati): A feladat kísérleti jellegű. Két diák kiállt a többiek elé, az egyik tekert, a másik számolt. A rendezett alapállapotból 126 tekerés után ismét megkapták a kiindulási helyzetet.

Második megoldás (elméleti): A kocka első és jobboldali lapja lényegében háromfajta kis kockából áll elő. A lapközéppontú kiskockák minden forgatáskor megtartják helyüket. Az élközép kockákat együtt vizsgálva észrevehetjük, hogy az alapállapotból kiindulva, ha a feladatbeli E1 és J3 forgatásokból 14-et végzünk, visszakerülnek a helyükre. A csúcsokat alkotó kis kockákról ugyanez 18 forgatás után mondható el. Mivel a lapok középpontjai helyben maradnak, ez azt jelenti, hogy ha az alapállapotból kiindulva a végzett forgatások száma 14 és 18 közös többszöröse, akkor a kocka ismét rendezetté válik. 14 és 18 legkisebb közös többszöröse 126, így megtaláltuk az elméleti magyarázatot a tapasztalt tényre.

3.2. feladat: Egy multinacionális cég tesztelni kívánja az általa gyártott drága poharak ütésállóságát. A cég székháza 36 emeletes. A tervezőt megbízzák, hogy határozza meg, legfeljebb melyik emeletről ejthető le törés nélkül a pohár (lehet, hogy a 36. emeletről leejtve sem törik össze, de az is lehet, hogy már az első emelet is túlságosan magasnak bizonyul). Két egyforma mintapoharat bíznak a kétségbeesett tervezőre. Legkevesebb hány méréssel tudja szegény megoldani a problémát?

Megoldás: A gyerekek több megoldást adtak. A legsikerültebb észrevétel az volt, hogy ha az első mérést a k. emeletről végezzük el, és a pohár összetörik, akkor a másik poharat az első, majd a második, a harmadik stb. emeletről rendre le kell ejteni. Vagyis legrosszabb esetben (amikor a második pohár a (k – 1). emeletről leejtve törik el) további $k - 1$ mérésre van szükségünk. Megfordítva: ha összesen k mérést kívánunk elvégezni, az első mérést legfeljebb a k. emeletről végezhetjük el.

Láttuk, hogy ha a pohár eltörik, akkor legfeljebb $k - 1$ további mérés elegendő a kérdéses emelet meghatározásához. Mi a helyzet akkor, ha a pohár nem törik el? Ekkor $k - 1$ mérésünk marad, az előzőek alapján a k. emelet felett legfeljebb $k - 1$ emelettel magasabbról végezhetjük el a második mérést. A továbbiakban a helyzet a korábbihoz hasonló, tehát azt mondhatjuk, hogy k méréssel legfeljebb $k + (k - 1) + (k - 2) + ... + 2 + 1 = \frac{k(k+1)}{2}$ emelet magas épület esetében tudjuk meghatározni azt az emeletet, amelyről a poharat leejtve, az összetörik.

Ez a képlet $k = 8$ esetén 36-ot ad, tehát 8 mérés elegendő a mérnök számára. Ha a poharak nem törnek el, akkor azok az emeletek, ahonnan az ejtegetést el kell végezni: 8., 8 + 7., 8 + 7 + 6., stb.

3.3. feladat: Bergengócia törpéi háborúban állnak a szomszédos országban élő gonosz manókkal. A szorgalmas törpék tízemeletes védőtornyokat próbálnak felállítani, ezeket már nem bírják lerombolni a manók. Egy nap alatt két szintet tudnak megépíteni a törpék. (Egy szint lehet új torony első emelete vagy már álló torony újabb emelete is.) Igen ám, de a manók minden nap lerombolnak egy tornyot. A törpéknek három évre való tartalék élelmiszerük van. Fel tudnak-e építeni ezalatt az idő alatt legalább egy tízemeletes tornyot?

Megoldás: Okoskodjunk visszafelé!

Ahhoz, hogy az utolsó napon felépíthessenek egy tízemeletes tornyot a törpék, szükség van két 9-emeletes toronyra az előző napról. (Csak az egyik épülő tízemeletes tornyot rombolják le a manók.) A két 9-emeletes torony négy 8-emeletes segítségével valósítható meg: egy nap alatt a két 8-emeletesből 9-emeletest építenek a törpék, majd a következő nap ugyanezt megteszik a másik két 8-emeletessel. Hasonlóan a négy 8-emeletes toronyhoz szükség van nyolc darab 7-emeletesre és így tovább.

Tehát az eljárás a következő:

512 (= 2^9) nap alatt felhúznak 512 darab egyemeletes épületet. (Minden nap kettőt építenek, a törpék csak az egyiket tudják lerombolni.)

256 (= 2^8) nap alatt felépítenek 256 darab kétemeletes épületet. (Minden nap két egyemeletest egy szinttel megmagasítanak; a törpék csak az egyiket tudják lerombolni.)

128 (= 2^7) nap alatt létrehoznak 128 darab 3-emeletes épületet (minden nap két már meglévő épületet magasítanak; a törpék az egyiket lerombolják).

Hasonlóan folytatva 64 (= 2^6) nap alatt felépül 64 darab 4-emeletes torony;

32 (= 2^5) nap alatt felépül 32 darab 5-emeletes torony;

16 (= 2^4) nap alatt felépül 16 darab 6-emeletes torony;

8 (= 2^3) nap alatt felépül 8 darab 7-emeletes torony;

4 (= 2^2) nap alatt felépül 4 darab 8-emeletes torony;

2 (= 2^1) nap alatt felépül 2 darab 9-emeletes torony;

végül az utolsó nap az egyiket 10-emeletesre magasítják.

A szükséges napok száma $2^9 + 2^8 + 2^7 + ... + 2^1 + 1 = 2^{10} - 1 = 1023$, vagyis három év, ha szűken is, de elég.

3.4. feladat: Legkevesebb hány egyenes vágásra van szükségünk, hogy egy 5x7-es méretű csokoládét 35 darab 1x1-es részre szétvágjunk, ha

a) egy vágással egyszerre csak egy csokidarabot vághatunk el;

b) a csokidarabokat, ha szükséges, elmozdíthatjuk, egymásra is tehetjük stb.

Megoldás: a) A feladat 34 vágással könnyen megoldható. Kevesebbel nem lehet: kezdetben egy darab csokoládé van, s minden vágás az össz-darabszámot eggyel növeli.

Megjegyzés: A feladat „egzisztencia és konstrukció”-típusú: nem elég a sejtett 34 értékre konstrukciót adni, azt is meg kell mutatni, hogy kisebb érték nem megfelelő.

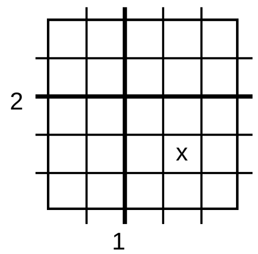
A +1-es invariancia-gondolat előkészítheti a gráfok összefüggőségével kapcsolatos kérdéseket is, lásd 4.11. feladat.

b) Minden vágás a meglévő csokidarabok számát legfeljebb megkétszerezheti (*2-es invariancia), ezért legalább 6 vágásra szükség van ($2^5 = 32 < 35$). Ha kb. a felezéses technikát alkalmazzuk, nem is nehéz a konkrét darabolást megadni. (Arra kell csak figyelni, hogy a vágások előtt a darabokat egymásra vagy alkalmasan egymás mellé pakoljuk.)

3.5. feladat: Oldjuk meg az előző feladat b) részét, ha 5x5-ös méretű csokoládét 1x1-es darabokra vágunk szét.

Megoldás: Mivel 5x5 = 25, és $2^4 < 25 < 2^5$, ezért legalább 5 vágásra szükségünk van. Azonban néhány próbálkozás után sejthető, hogy nem lesz elég az 5 vágás. Igaz, hogy a darabszámok legfeljebb kétszereződhetnek, de semmi sem biztosítja, hogy 5 vágással ténylegesen fel tudjuk osztani a csokoládét 1x1-es darabokra. Új gondolatra van szükség.

Az első két vágás után mindig marad egy legalább 3x3-as összefüggő rész. A középső négyzet kiszabadításához szükség van további négy vágásra, ez összesen 6 vágás (ábra).



3.6. feladat: Egy négy egység élhosszúságú kockát akarunk szétvágni 64 darab egységnyi élű kiskockára. Hány vágással tehetjük ezt meg, ha

a) a szétvágással keletkező darabokat nem mozdítjuk el egymástól;

b) az egyes vágások után kapott darabokat alkalmas módon átrendezhetjük?

Megoldás: Az előző két feladat alapján

a) 63 vágás;

b) 6 vágás (felezéses technikával).

3.7. feladat: Oldjuk meg az előző feladat b) részét, ha 5x5x5-ös méretű kockát 1x1x1-es darabokra vágunk szét.

Megoldás: 5x5x5 = 125 < 128 = 2^7, ezért elvileg elég 7 vágás. De biztosan marad az első vágás után egy legalább 5x5x3-as, a második után egy legalább 5x3x3-as, a harmadik után pedig egy legalább 3x3x3-as összefüggő test. A 3x3x3-as kockához már elvileg is szükség van 5 vágásra (ui. $2^4 = 16 < 3x3x3 = 27$), de gyakorlatilag 6 vágás kell: a középső

1x1x1-es kocka minden lapját ki kell szabadítani. Meglepő, de összesen 9 vágásra van szükség; éppen úgy, mint a 8x8x8-as kocka esetében.

Bolha-problémakör

Az alábbi feladatcsokor *Benczúr András: Algoritmus vagy véletlen (KöMaL 1992. január)* című cikkéből származik.

Egy bolhát próbálunk elkapni a sötétben. A bolha másodpercenként ugrik egyet a koordinátarendszer rácspontjain, nem látjuk, honnan indul és hová érkezik. Minden másodperc végén rácsapunk egy rácspontra, ha ügyesek vagyunk, ekkor elfoghatjuk a bolhát.

El tudjuk-e kapni az origóból induló, ismeretlen (egész) sebességgel, lineáris irányban menekülő bolhát? Ha igen, mennyi idő múlva?

3.8. feladat: A bolha az x tengely pozitív irányába menekül.

Megoldás: A gyerekek általában hitetlenkednek: hogy kaphatnánk el a bolhát, ha nem is tudjuk, hogy mekkora a sebessége? De ha gyanakodni kezdenek, hogy esetleg mégis lehetséges az elfogás, a megoldás már nem túl nehéz.

Az első másodpercben feltesszük, hogy a bolha sebessége 0. A (0; 0) pontra csapunk.

Ha nem lett meg a bolha, a második másodpercben feltesszük, hogy sebessége 1. Ekkor a (2; 0) rácspontban kell lennie, ott próbáljuk meg elkapni.

Ha nem lett meg a bolha, tovább folytatjuk az eljárást: a t. másodpercben feltesszük, hogy sebessége $(t-1)$, s a $(t(t-1); 0)$ rácsponttal próbálkozunk. Világos, hogy ha a bolha sebessége v, akkor a $(v+1)$. másodpercben, a $(v(v+1); 0)$ rácspontban elkapjuk.

3.9. feladat: A bolha az x tengely valamelyik irányába menekül.

Megoldás: A bolha két irányba is menekülhet.

Egy lehetséges stratégia, hogy a sebességek szerint haladunk, s mindegyik sebességértékhez mindkét irányt kipróbáljuk. Az alábbi táblázat mutatja a stratégiát.

idő (mp)	1	2	3	4	5	6	7	stb.
feltett sebesség	0	+1	–1	+2	–2	+3	–3	
rácspont	(0; 0)	(2; 0)	(–3; 0)	(8; 0)	(–10; 0)	(18; 0)	(–21; 0)	

Megjegyzés: Érdemes gyakoroltatni a címfüggvények kiszámolását. Pl.: ha a bolha sebessége $+v$, mikor és hol kapjuk el? (Megoldás: A $2v$. másodpercben a $(2v^2; 0)$ pontban.) Vagy: pl. a 29. másodpercben milyen sebességű bolhát kapunk el? (M: –14)

Az is világos, hogy a két lehetséges irány helyett véges sok irányra is ugyanígy megoldható a feladat.

3.10. feladat: A bolha a két tengely valamelyik irányába menekül.

Megoldás: Lásd az előző feladat megjegyzését. 4 menekülési irányra az előzőhöz hasonló megoldást adhatunk.

3.11. feladat: A bolha ismeretlen $\mathbf{v}(x, y)$ sebességvektorral, síkban menekül, az origóból indul (x és y nemnegatív egész értékek).

Megoldás: Ez nehéz feladat. Egyrészt azért, mert végtelen sok irányban menekülhet a bolha, s ez elég nagy nehézségi ugrás. Másrészt a gyerekek hitetlenkedése lényegesen korlátozza a gondolkodásukat. Ennek ellenére többen, többféleképpen megoldották a feladatot.

Arról van szó, hogy az első síknegyed rácspontjait kell valamilyen stratégiával bejárnunk; a rácspontok megfeleltethetők a bolha kezdősebességének, s az aktuális másodpercszámmal szorozva a két koordinátát, megkapjuk a bolha tartózkodási helyét.

Többen a „négyzetes" bejárást adták: (0; 0); (1; 0), (1; 1), (0; 1); (2; 0), (2; 1), (2; 2), (1; 2), (0; 2) stb. Amikor az 1.2. feladat

```
                (0,0)
           (1,0)    (0,1)
      (2,0)    (1,1)    (0,2)
 (3,0)    (2,1)    (1,2)    (0,3) stb.
```

táblázatára utaltam, a segítség túl nagy lett: a kapcsolat nyilvánvaló a táblázat és a szintén többek által mutatott „háromszöges" bejárás között.

A címfüggvényt az 1.2. feladat megoldásában megadtuk, most csak egy konkrét példa:

Ha a bolha sebessége pl. (3; 2), akkor a táblázat 6. sorának 3. eleméről van szó. Ezt a sebességet az $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 3 = 18$. másodpercben próbáljuk ki, s a $18\cdot(3; 2) = (54; 36)$ rácspontban elkapjuk a bolhát.

3.12. feladat: A bolha az x tengely ismeretlen rácspontjából indul, az x tengely pozitív irányába menekül.

Megoldás: Most már a sebességén kívül a bolha kezdeti helyét sem tudjuk. A feladat mégsem nehezítés: az előző feladat számpárait kell végigpróbálnunk, pl. (hely; sebesség) megoszlásban.

3.13. feladat: A bolha az x tengely ismeretlen rácspontjából indul, a négy irány valamelyike felé menekül.

Megoldás: Házi feladat. Ha túl nehéz a probléma, ismét az olvasó figyelmébe ajánljuk a KöMaL 1992/1-es cikkét.

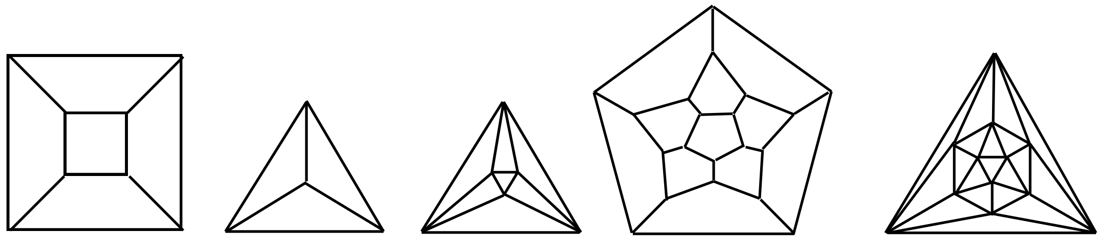
4. Gráfok

4.1. feladat: Vezessük be a gráfelméleti alapfogalmakat!

Megoldás: Ha felveszünk néhány pontot, s közülük egyeseket összekötünk egymással, gráfot kapunk. Az összekötő vonalakat éleknek nevezzük. Az élek lehetnek egyenesek, görbék; megtehetjük, hogy két pontot több vonallal is összekötünk (többszörös él); vagy esetleg egy pontból kiinduló vonal ugyanabba a pontba tér vissza (hurokél). A többszörös éleket és hurokéleket nem tartalmazó gráfokat egyszerű gráfnak nevezzük.

A gráf fogalma elég speciális ahhoz, hogy alapszinten matematikailag könnyen kezelhessük; ugyanakkor elég általános, hogy széles körben használhassuk. Olyan esetekben, amikor objektumokról és közöttük lévő kapcsolatokról van szó, mindig érdemes a gráfmodellt alkalmazni. (Pl. egy társaságban az embereket pontokkal, a közöttük lévő ismeretségeket élekkel jelölhetjük.)

A szabályos testek síkba rajzolt modelljei is gráfot alkotnak. Az egyes csúcsok közötti kapcsolat nem változik, ha pl. a poliéder egyik lapját megnagyítjuk, s a többi csúcsot és élt erre a lapra rávetítjük (lásd ábra).



Könnyen látható, hogy ezt az eljárást bármilyen konvex poliéderrel megtehetjük.

4.2. feladat: A 2.6. feladatban észrevettük, hogy szabályos testekre teljesül a „csúcs + lap = él + 2” összefüggés; a 2.10. feladatban láttuk, hogy az összefüggés nemcsak szabályos poliéderekre igaz. Hogyan módosul a tétel gráfok esetén?

Megoldás: Gráfok esetén lapok helyett tartományokról szoktunk beszélni, bár nem okoz félreértést a „lap” szó használata sem.

A poliéder-gráfok képzéséből következik, hogy a csúcsok és élek száma nem változik, a lapok száma eggyel csökken. Ezért egyik lehetőség, hogy síkban „csúcs + tartomány = él + 1” alakban mondjuk ki a sejtést.

Sokkal vonzóbb lenne azonban, ha a „csúcs + tartomány = él + 2” alakot meg tudnánk tartani. Ezt vagy úgy tehetjük meg, hogy a +1 tartománynak a poliéder legnagyobb lapját vesszük (az ábráinkon az a sokszög – „konvex burok” -, amely tartalmazza a többi pontot); vagy a +1 tartománynak a végtelen síktartományt tekintjük (az ábrákon a legnagyobb lapon kívül eső rész).

Ilyen megfontolásokkal úgy tűnik, hogy a „csúcs + tartomány = él + 2” sejtés gráfokra is teljesül.

4.3. feladat: Bizonyítsuk be Euler-tételét: síkbeli gráfokban „csúcs + tartomány = él + 2”. (Itt a +2 a 4.2. megoldásbeli megszorítással értendő.)

Megoldás: Síkba rajzolható összefüggő gráfokra bizonyítjuk a tételt.

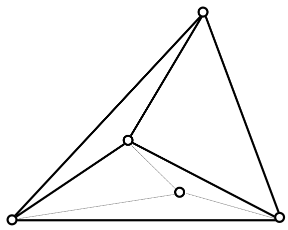
Minden összefüggő gráf felépíthető élről-élre haladva. Induljunk ki az egyetlen pontból álló gráfból! Erre Euler tétele teljesül: egy csúcs, egy tartomány (a végtelen sík, kivéve a csúcsot), nincs él.

Ezután sorra felvesszük az új éleket. Mindegyik lépésben az új él vagy régi csúcsot újjal köt össze (ekkor a csúcsok és élek száma eggyel nő), vagy két már meglévő csúcsot köt össze (ekkor a tartományok és élek száma nő eggyel). Mindkét esetben továbbra is érvényben marad a tétel.

Megjegyzés: A fentiekből már következik, hogy minden konvex poliéderre is érvényes Euler tétele. Sőt a bizonyításból az is látható, hogy többszörös élek és hurokélek esetén is alkalmazható a tétel.

4.4. feladat: Egy háromszög belsejében vegyünk fel 6 darab általános helyzetű pontot (semelyik három pont ne legyen egy egyenesen). Bontsuk fel a sokszöget háromszögekre úgy, hogy minden háromszög csúcsa csak a sokszögcsúcsokkal vagy a felvett pontokkal essen egybe. Mit mondhatunk a keletkezett háromszögek számáról?

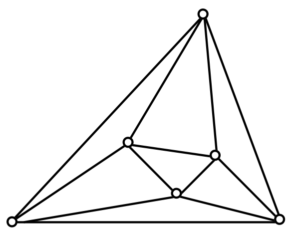
Első „megoldás” (hibás): Az első pont három részháromszögre bontja az eredeti háromszöget (ábra). Ezután az újabb pont valamelyik háromszög belsejébe kerül. Az új pontot a háromszög csúcsaival összekötve, a részháromszögek száma kettővel nő, öt részháromszöget kapunk. Az eljárást folytatva, a kis háromszögek száma pontonként kettővel nő, 6 pont felvétele után 13 részháromszöget kapunk.



Második megoldás: Tegyük fel, hogy a 6 pont felvétele és a szakaszok berajzolása után h darab háromszöget kaptunk. A háromszögek belső szögeinek összege $h \cdot 180°$. Ez az összeg a 6 pont körüli 360°-os teljes szögek és az alapháromszög belső szögeiből tevődik össze, tehát $6 \cdot 360° + 180° = h \cdot 180°$. Innen $h = 13$.

Megjegyzés: Hol a hiba az első megoldásban?

A pontokat a diákok sorban veszik fel, egymás után, s a pontfelvételből származtatják a háromszögeket. Könnyű olyan ábrát rajzolni, amely esetében a fenti gondolatmenet nem használható:



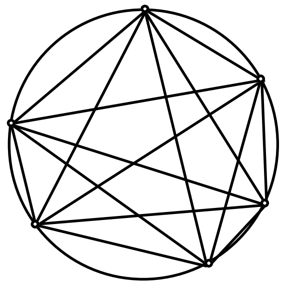
Ezen az ábrán látszik, hogy a belső pontok között nincs „első” és „következő”.

Érdekes továbbá, hogy a háromszögek száma állandó; vagyis nem függ attól, hogy hogyan vesszük fel vagy kötjük össze a pontokat.

4.5. feladat: Egy körlemez kerületén sorban felveszünk 1, 2, 3, 4 pontot, s ezeket egyenes szakaszokkal összekötjük egymással. A szakaszok a körlemezt rendre 1, 2, 4, 8 részre osztják. Ez alapján van-e sejtésünk, hogy legfeljebb hány részre osztják 6 pont esetén a szakaszok a körlemezt?

Megoldás: A legtöbb tartományt akkor kaphatjuk, ha a szakaszok közül semelyik három nem megy át egy ponton.

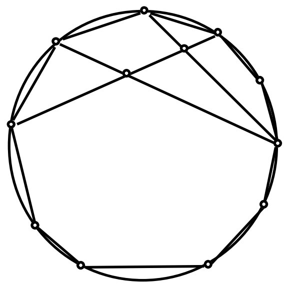
Az 5. ponthoz tartozó szakaszok behúzása után 16 tartományt kapunk. Innen az a sejtésünk támadhat, hogy n pont esetén 2^{n-1} a tartományok száma, de az alábbi ábra mutatja, hogy a sejtés már $n = 6$ pontra sem teljesül: 31 tartomány keletkezik.



4.6. feladat: Oldjuk meg az előző feladatot pl. $n = 10$ pontra! Vagyis a kör kerületén vegyünk fel 10 pontot, ezeket szakaszokkal kössük össze egymással, s határozzuk meg a keletkezett tartományok maximális számát!

Megoldás: A legtöbb tartományt akkor kaphatjuk, ha a szakaszok közül semelyik három nem megy át egy ponton.

A 10 pont és az összes szakasz behúzása után egy síkgráfot kapunk, amelyben a szakaszok metszéspontjait is a gráf pontjainak tekintjük. Próbáljuk meg Euler tételét alkalmazni! (Az alábbi ábra egy részletet mutat.)



A többszörös élekkel rendelkező gráfokra is felírható a tétel, de tudnunk kellene, hány pontja van a gráfnak. Segít az az észrevétel, hogy körön belüli pont csak két átló metszéspontjaként jöhet létre; két átlót pedig négy körön lévő pont határoz meg. A kapcsolat kölcsönösen egyértelmű: bármely négy kerületi ponthoz pontosan egy átló-metszéspont rendelhető. A tíz kerületi pontból négyet $\binom{10}{4}$-féleképpen választhatunk ki, ennyi metszéspont van a körön belül.

A csúcsok száma tehát $10 + \binom{10}{4}$.

A kerületi pontokból 11, a belső pontokból 4 él indul ki, így az élek száma

$$\frac{10 \cdot 11 + 4 \cdot \binom{10}{4}}{2}.$$

Jelöljük a tartományok számát x-szel, ekkor Euler tétele miatt $10 + \binom{10}{4} + x = \frac{10 \cdot 11 + 4 \cdot \binom{10}{4}}{2} + 2$. Az egyenletet rendezve $10 + x = \binom{10}{4} + \frac{10 \cdot 11}{2} + 2$, innen $x = \binom{10}{4} + \binom{10}{2} + 2$.

Euler tételében a végtelen tartomány is szerepel, így a körön belüli részek száma eggyel kevesebb: $\binom{10}{4} + \binom{10}{2} + 1$.

Megjegyzés: A keletkezett tartományok számát $\binom{10}{4} + \binom{10}{2} + \binom{10}{0}$ alakban is írhatjuk, s ez a képlet mutatja, hogy más jellegű megoldás is adható.

Gráfelméleti játékok

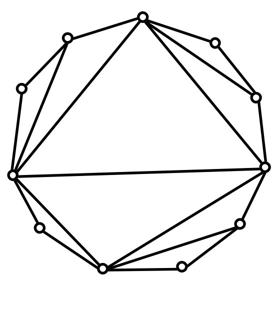
Az alábbi játékokban a gráfokkal kapcsolatos fogalmakat gyakorolhatjuk. Házi feladatként próbáljuk meg a játékokat különböző irányokban általánosítani!

4.7. feladat: Ketten felváltva egy szabályos 10-szög átlóit vagy oldalait húzzák be úgy, hogy a szakaszok nem metszhetik egymást. Az a játékos veszít, aki már nem tud újabb szakaszt behúzni. Kinek van nyerő stratégiája?

Megoldás: A kezdő játékosnak van nyerő stratégiája.
Kezdésként behúzza a 10-szög egy tükörtengely-átlóját. Ezután bármit húz ellenfele, annak tükrös szakaszpárját húzza be. Előbb-utóbb elfogynak a behúzható szakaszok, a másodhúzó nem fog tudni „lépni”.

4.8. feladat: Oldjuk meg az előző feladatot szabályos 11-szögre!

Megoldás: Az előző szimmetria-gondolat most nem alkalmazható. Néhány próbajáték után azt sejtették a diákok, hogy mindig a kezdő játékos nyer.
A 4.4. feladatban 9 pontot úgy kötöttünk össze szakaszokkal úgy, hogy eredményül háromszögeket kaptunk. Észrevettük, hogy tetszőleges felbontás esetén állandó a háromszögek száma. Most is hasonló gondolatmenetet követhetünk.



A játék végállapotában háromszögeket kapunk, különben folytathatnánk a szakaszok behúzását. Jelöljük a keletkezett háromszögek számát h-val. Ezek belső szögeinek összege $h \cdot 180°$, s ez az összeg egyúttal a 11-szög belső szögeinek összegével egyezik meg: $h \cdot 180° = 9 \cdot 180°$. Tehát a játék végén mindig 9 darab háromszög keletkezik.

Az pedig már könnyen látható (Euler tételére sincs szükség), hogy 9 háromszög létrehozásához 8 átlót kell behúzni. A 11 oldallal együtt összesen 19 szakaszt húz be a két játékos. Ez azt jelenti, hogy mindig a kezdő nyer, nincs szüksége „stratégiára".

Megjegyzés: Ez az invariancia-gondolat az előző 4.7. játékban is minden további nélkül alkalmazható: $h \cdot 180° = 8 \cdot 180°$; 8 darab háromszög keletkezik; 7 átlót és 10 oldalélt húz be a két játékos, vagyis összesen 17 szakaszt. A kezdő nyer.

Érdemes a játékot tetszőleges n-szögre általánosítani.

4.9. feladat: Ketten felváltva egy szabályos 11-szög átlóit vagy oldalait húzzák be úgy, hogy a behúzott szakaszoknak nem lehet közös pontja (csúcsban sem). Az a játékos veszít, aki már nem tud újabb szakaszt behúzni. Kinek van nyerő stratégiája?

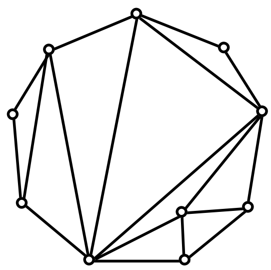
Megoldás: Ezt a szép és nehéz feladatot időhiány miatt nem beszéltük meg a foglalkozásokon; maradjon ezúttal is házi feladat.

4.10. feladat: A 4.7. feladatban a 10 pont szabályos 10-szöget alkotott. Lehetséges-e, hogy ha a pontok kezdeti helyzetét megváltoztatjuk, az új játékban már a második játékosnak lesz nyerő stratégiája?

Megoldás: Arra kell törekedni, hogy az összes behúzható szakasz száma páros legyen.

Tekintsünk pl. egy szabályos 9-szöget, s belsejében egy további pontot (semelyik három pont ne legyen egy egyenesen).

Ha az összekötő szakaszok behúzása után h darab háromszög keletkezik, akkor $h \cdot 180° = 7 \cdot 180° + 360°$ (a belső pont körül 360° a szögösszeg).



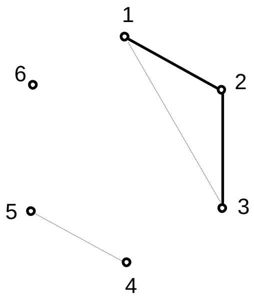
Innen $h = 9$. A külső végtelen síkrészt is számolva a tartományok száma 10, a csúcsok száma 10, így Euler tétele miatt összesen 18 él keletkezik: a második játékosnak van „nyerő stratégiája".

4.11. feladat: Adott 6 pont a síkon. Ketten felváltva húznak be éleket a gráfban. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája, ha az a játékos nyer, aki a gráfot összefüggővé teszi?

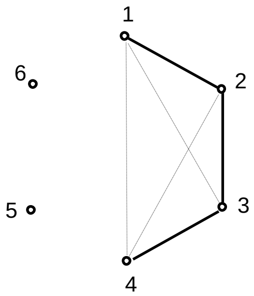
Megoldás: Első észrevétel, hogy a gráf összefüggőségéhez legalább 5 élt be kell húzni. Ui. a játék kezdetén a gráf 6 komponensből áll, s egy él behúzása legfeljebb eggyel csökkenti a komponensek számát. (Lásd 2.4. feladat a) része.) Ha pontosan 5 élt behúzva a gráf összefüggő lesz, ún. „fát” kapunk. Ennek jellemzője, hogy nem tartalmaz gráfelméleti „kört”, vagyis nem vezet semelyik pontból önmagába élsorozat.

Ha 5 él felvétele esetén véget ér a játék, akkor a kezdő játékos nyer. Ezért a másodhúzónak arra kell törekednie, hogy a játék folyamán valamikor kört hozzon létre, mert ekkor van lehetősége plussz él behúzására.

Sorszámozzuk a pontokat 1, 2, ... , 6-tal. A szimmetrikus helyzetek miatt feltehetjük, hogy a kezdő játékos mindig az $\overline{12}$ élt húzza be. A fentiek miatt a második játékos nem húzhat pl. $\overline{34}$-et, mert első $\overline{56}$ válasza után még pontosan 2 élt húznak be a játék folyamán. Tehát a második játékos válasza $\overline{12}$-re $\overline{23}$. Most ha a kezdő $\overline{54}$-et lép, erre a második $\overline{13}$-mal válaszol, s sikerült egy hatodik élt felvennie: két további éllel befejezhető a játék.



Ha a kezdő lépi $\overline{13}$-at, akkor az $\overline{54}$ húzás csak lépéscserét jelent, ezért a kezdőnek az $\overline{123}$ komponenst kell bővítenie, pl. $\overline{34}$-gyel (vagy bármilyen, vele szimmetrikus szerepű húzással). Az így kapott 3-komponensű gráfot a következő ábrán láthatjuk.



Most az a játékos veszít, aki az 5-ös vagy 6-os pontot kénytelen összekötni egymással vagy valamelyik kisebb sorszámú ponttal. Ekkor ui. a gráf komponenseinek száma 2 lesz, s a következő játékos ezt 1-re csökkentheti, vagyis összefüggővé teheti a gráfot.

Az 5-ös és 6-os pont elkerülésével 3 él húzható be, az ábrán szaggatottal jelöltük. Ez azt jelenti, hogy ezen 6 él behúzása után még kettőt húznak be a játékosok, vagyis mindkét játékos legjobb játékával összesen 8 él húzható be. A második játékos nyer.

4.12. feladat: Adott 6 pont a síkon. Ketten felváltva húznak be éleket a gráfban. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája, ha az a játékos veszít, aki egy gráfelméleti kört zár be?

Megoldás: A kezdő nyer.

Ha mindkét játékos jól játszik, akkor 5 él behúzása után a gráf összefüggő lesz. (Minden húzással eggyel csökken a komponensek száma, hiszen nem kapunk kört.) A 6. húzás már nem csökkentheti a komponensek számát: kialakul egy kör.

4.13. feladat: Adott egy szabályos 6-szög 6 csúcsa. Ketten felváltva húznak be éleket a gráfban. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája, ha az a játékos veszít, aki olyan háromszöget hoz létre, amelynek minden csúcsa az adott 6 pont közül való?

Megoldás: A feladat könnyű. Egy tükörtengely-átlót behúz a kezdő; mivel ezután szimmetrikus válaszlépéseket tehet, a kezdő nyer.

Megjegyzés: Mi a helyzet pl. szabályos 7-szögre?

4.14. feladat: Adott a síkon egy szabályos ötszög öt csúcsa. Két játékos a csúcsokat felváltva köti össze egy síkbeli *görbe vonallal* úgy, hogy egyetlen már meghúzott vonalat sem szabad metszeni. Az veszít, aki először nem tud két csúcsot összekötni.

a) Kinek van nyerő stratégiája?

b) Függ-e a játék kimenetele a pontok kezdeti helyzetétől?

Előzetes megjegyzés: Az eddigi játékokban nem volt jelentősége annak, hogy egy élt szakasszal vagy görbe vonallal veszünk fel. Ebben a játékban az esetlegesen keletkező metszéspontok miatt már figyelembe kell venni ezt az új lehetőséget.

Azt mondjuk, hogy egy gráf síkba rajzolható, ha éleit – esetleg görbe vonallal – úgy rajzolhatjuk meg, hogy semelyik két élnek nincs közös pontja. A feladat tulajdonképpen arra kérdez rá, hogy egy szabályos 5-szög alakú síkba rajzolható gráfban legfeljebb hány él lehet.

Megoldás: a) Némi próbálkozás után észrevették a gyerekek, hogy mindig 9 (esetleg görbe vonalú) élt tud behúzni a két játékos, ezért a kezdő nyer.

Vegyük észre, hogy a végállapotban síkbeli háromszögtartományokat kapunk: ezeknek három, nem szükségképpen egyenes oldaluk van. (Ez igaz a végtelen tartományra is!) Ui. ha egy tartomány nagyobb oldalszámú, akkor behúzhatunk további – esetleg görbe – élt valamely két pontja között. Legyen a háromszögtartományok száma h, ekkor az élek száma $\frac{3h}{2}$. Felírhatjuk Euler tételét: $5 + h = \frac{3h}{2} + 2$. Ennek megoldása $h = 6$, innen az élek száma 9. És ezt a 9 élt be is tudja húzni a két játékos, ui. a nem-háromszög tartományok tovább darabolhatók.

b) A fentiekből következik az az érdekesség, hogy nem függ a játék végeredménye a pontok kezdeti helyzetétől.

Megjegyzés: A diákok körében nagy sikert aratott, hogy a poliéderekre kimondott tétel egy gráfelméleti játékban milyen hatékonyan alkalmazható.

4.15. feladat: Egy 10x10-es négyzethálós papíron ketten a következő játékot játsszák. Felváltva behúzhatják a rács egy-egy tetszőleges egységélét. Kinek van nyerő stratégiája, ha:

a) az a játékos győz, aki először tud körbekeríteni egy területet;

b) szerepcsere: az a játékos veszít, aki először kénytelen valamekkora területet bezárni?

Megoldás: Ezt a gyerekkoromban sokat játszott játékot nem beszéltük meg a foglalkozásokon, ezért csak kis segítséget adnék:

a) szimmetria;

b) stratégiától függetlenül állandó számú él húzható.